Tópicos en Teoría General de Anillos.

José Cruz Gracía Zagal y Ángel Zaldívar Corichi

7 de marzo de 2013

Introducción

BLAAAA

Capítulo 1

Teorías de Torsión

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1. (Dickson)

Una Teoría de torsión para R-Mod es una pareja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clases de objetos en R-Mod tales que:

(i) $Hom(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $Hom(C, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $C \in \mathcal{T}$.

(iii) Si $Hom(T, C) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, entonces $C \in \mathcal{F}$.

A la clase $\mathcal{T}$ se le llama *clase de torsión* y a sus objetos se les llama objetos de torsión, a la clase $\mathcal{F}$ se le llama la clase *libre de torsión* y sus objetos se les conoce como objetos libres de torsión.

Ejemplos .

1) En la categoría de grupos de abelianos, $\mathbb{Z}$-Mod, si consideramos $\mathcal{T}$=Grupos de torsión y $\mathcal{F}$=Grupos libres de torsión note que, como todo morfismo de grupos manda elementos de orden finito a elementos de orden finito se tiene que se cumple el axióma (i) de la definición de Teoría de Torsión y los otros dos incisos son igual de inmediatos.

2) En la categoría de grupos abelianos considere lo siguiente, dado G un grupo abeliano definamos

$$dG = \sum \{H \leq G | H \text{ es divisible }\}.$$

Por definición dG es un subgrupo de G más aún es el mayor subgrupo divisible de G. Con el formamos las siguientes clases. $\mathcal{T} = \{G | dG = G\}$ y $\mathcal{F} = \{G | dG = 0\}$. Veamos que estas dos clases forman una teoría de torsión.

(i) Como todo morfismo de grupos abelianos manda la parte divisible en la parte divisible entonces claramente $Hom(G, D) = 0$ para todo $G \in \mathcal{T}$ y $D \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $Hom(C, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, en pariticular $Hom(C, C/dC) = 0$ y así el morfismo canonico $\eta : C \to C/dC$ es cero y por lo tanto $C = dC$.

(iii) Si $Hom(T, C) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, en particular se tiene que $Hom(dC, C) = 0$ y como $dC \leq C$ entonces $dC = 0$, es decir, $C \in \mathcal{F}$.

(iv) Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos definimos las siguientes clases apartir de la clase $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \{M | Hom(C, M) = 0 \text{ para todo } C \in \mathcal{C}\}$$

y

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \{N | Hom(N, M) = 0 \text{ para todo } M \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}\}$$

Note que por definición la pareja $(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}})$ forma una Teoría de Torsión. A esta se le conoce como la *Teoría de Torsión generada por* $\mathcal{C}$.

Dualmente definimos la Teoría de Torsión *cogenerada* por $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{T}^{\mathcal{C}} = \{M | Hom(M, C) = 0 \text{ para todo } C \in \mathcal{C}\}$$

y

$$\mathcal{F}^{\mathcal{C}} = \left\{N | Hom(N, M) = 0 \text{ para todo } M \in \mathcal{T}^{\mathcal{C}}\right\}$$

Definición 1.1.2. Una clase $\mathcal{C}$ de R-Mod es una *clase de Torsión* si existe una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{C} = \mathcal{T}$. Dualmente la clase $\mathcal{C}$ es una clase *Libre de Torsión* si existe una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{C} = \mathcal{F}$.

Proposición 1.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos, entonces $\mathcal{C}$ es una clase de torsión si y sólo si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes y extensiones.

Demostración. Suponga que existe una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{C} = \mathcal{T}$, sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ entonces note que $Hom(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha, F) \cong \prod_{\alpha \in \Lambda} Hom(M_\alpha, F)$ con $F \in \mathcal{F}$ y como $M_\alpha \in \mathcal{C} = \mathcal{T}$ entonces $Hom(M_\alpha, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $\alpha \in \Lambda$ y así $\prod_{\alpha \in \Lambda} Hom(M_\alpha, F) = 0$ y consecuentemente $Hom(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha, F) = 0$ por lo que $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \in \mathcal{C}$

Ahora sea $M \in \mathcal{C}$ y $K \in Sub_R(M)$ veamos que $M/K \in \mathcal{C}$.

Para esto consideremos $F \in \mathcal{F}$ y la sucesión

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

entonces bajo el funtor $Hom(, F)$ obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom(M/K, F) \longrightarrow Hom(M, F) \longrightarrow Hom(K, F)$$

Pero como $M \in \mathcal{C}$ entonces $Hom(M, F) = 0$ y así $Hom(M/K, F) = 0$ y por lo tanto $M/K \in \mathcal{C}$.

Para ver que la clase es cerrada bajo extensiones de la sucesión anterior si suponemos que dado M tal que $K, M/K \in \mathcal{C}$ entonces $Hom(K, F) = 0$ y $Hom(M/K, F) = 0$ por lo tanto $Hom(M, F) = 0$.

Reciprocamente supongamos que la clase $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes, y extensiones. Consideremos la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$, $(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}})$.

Afirmamos que $\mathcal{C} = \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. Tenemos una contención por definicón de generar $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, para la otra contención consideremos $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ y sea $K = \sum \{N \leq M | N \in \mathcal{C}\}$ (K es el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathcal{C}$) suponga que $M \neq K$ entonces el cociente M/K no se anula y observemos en la sucesión

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

entonces si $Hom(C, M/K) = 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$ por definición de teoria de torsión generada tendriamos que $M/K \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ y asi $M/K = 0$ lo cual contradice nuestra hipotésis por lo tanto existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $Hom(C, M/K) \neq 0$ así existe $f \in Hom(C, M/K)$ no cero, si consideramos su imagen $f(C)$ está no es cero por lo que $f(C) = N/K$ con N submodulo de M tal que contiene propiamente a K entonces si observamos la sucesión

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow N/K \longrightarrow 0$$

los extremos estan en $\mathcal{C}$ y así N está, lo cual contradice la maximalidad de K. Por lo tanto $M = K$.

□

Dualmente tenemos:

Proposición 1.1.4. Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos, entonces $\mathcal{C}$ es una clase libre de torsión si y sólo si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos directas, submódulos y extensiones.

Notemos que dada una clase $\mathcal{C}$ de módulos $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ es la mayor clase de torsión que contiene a $\mathcal{C}$ y que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ es la mayor clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{C}$. Esto sugiere lo siguiente.

Denotemos por $R - TORS$ a la colección de todas las teorías de torsión en $R - Mod$, se define un orden en $R - TORS$ dado por

$$(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \prec (\mathcal{T}', \mathcal{F}')$$

si y solo si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, $(0, R - Mod)$ es la menor teoría de torsión y $(R - Mod, 0)$ es la mayor toería de torsión segun nuestro orden, ahora sea $\{(\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{F})_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} = \tau_\alpha$ una familia de teorías de torsíon denotemos por $\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ a la teoría de torsión cuya clase de torsión es $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ y $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ la teoría de torsión cuya clase libre de torsión es $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha$, entonces por la definición del orden en $R - TORS$

$$\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$$

y

$$\bigvee_{\alpha\in\Lambda}\tau_\alpha$$

son el infimo y el supremo de la familia τ_α. Por lo tanto $R-TORS$ es una gran retícula completa. Más adelante veremos que este enfoque es bastante utíl pero antes necesitamos reducir nuestro obejeto de estudio, para esto veamos que impacto tiene pedirle a la clase de torsión que sea cerrada bajo subobjetos.

Proposición 1.1.5. Sea $(\mathcal{T},\mathcal{F})=\tau$ una teoría de torsión. $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo capsulas inyectivas.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos, sea $M\in\mathcal{F}$ y consideremos la capsula inyectiva de M, $E(M)$ y el submódulo de torsión $t_\tau(E(M))=\sum\{H\leq E(M)|H\in\mathcal{T}\}$, entonces veamos que $t_\tau(E(M))=0$ (pues la clase $\mathcal{F}$ en particular es libre de pretorsión). Supongamos que $t_\tau(E(M))$ es distinto de cero, entonces siendo M esencial en $E(M)$ se tiene que $t_\tau(E(M))\cap M$ es no cero pero este es un submódulo de $t_\tau(M)=0$ (por la hipotésis) por lo tanto $t_\tau(E(M))=0$ y así $E(M)\in\mathcal{F}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo capsulas inyectivas.

Sea $M\in\mathcal{T}$ y N cualquier submódulo de M no cero, si sucediera que $N\notin\mathcal{T}$ entonces $t_\tau(N)$ es no cero y así $N/t_\tau(N)$ es no cero y $N/t_\tau(N)\in\mathcal{F}$ por lo tanto estamos en la situación:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\
0 \arrow[r] & N/t_\tau(N) \arrow[r] & E(N/t_\tau(N))
\end{tikzcd}$$

entonces existe $\varphi:M\to E(N/t_\tau(N))$ no cero, pero por hipotésis $E(N/t_\tau(N))\in\mathcal{F}$ lo cual es un absurdo puesto que M es de torsión. Por lo tanto $N=t_\tau(N)$. □

Definición 1.1.6. Sea $\tau=(\mathcal{T},\mathcal{F})$ una teoría de torsión, diremos que τ es *hereditaria* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos (equivalentemente $\mathcal{F}$ es cerrada bajo capsulas inyectivas)

Proposición 1.1.7. Si una clase $\mathcal{C}$ de módulos es cerrada bajo submódulos y cocientes entonces la teoría de torsión generada por es $\mathcal{C}$ es hereditaria.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{F}_\mathcal{C}=\{N|Hom(C,N)=0\forall C\in\mathcal{C}\}$. Sea $N\in\mathcal{F}_\mathcal{C}$ veamos que $E(N)\in\mathcal{F}_\mathcal{C}$ para esto supongamos que existe un $C\in\mathcal{C}$ y un morfismo no cero $f\in Hom(C,E(N))$ entonces la imagen de f, $Imf\leq E(N)$ es un submódulo no cero de $E(N)$ por lo que $N\cap Imf$ es no cero y así $N\cap Imf\in\mathcal{C}$ por lo tanto existe un módulo en $\mathcal{C}$ tal que hay un morfismo no cero de el en N, a saber $N\cap Imf$ y la inclusión y esto es una contradicción pues $N\in\mathcal{F}_\mathcal{C}$. □

Proposición 1.1.8. Sea $\tau=(\mathcal{T},\mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria entonces τ está generada por $\mathcal{C}=\{R/I|R/I\in\mathcal{T}\}$ es decir la clase de ciclícos tales que son de torsión.

Demostración. Veamos que la clase libre generada por $\mathcal{C}$ coincide con $\mathcal{F}$, para esto sea $N \in \mathcal{F}$ entonces $Hom(T, N) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$ en particular $Hom(R/I, N) = 0$ para todo $R/I \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{F}$.

Para la otra contención tomemos N tal que $Hom(R/I, N) = 0$ para todo $R/I \in \mathcal{C}$. Supongamos que existe $M \in \mathcal{T}$ tal que $Hom(M, N) \neq 0$, es decir, existe un $m \in M$ tal que $f(m) \neq 0$ para algún $f \in Hom(M, N)$ entonces $f_{|Rm} : Rm \to N$ es no cero pero Rm es un módulo ciclico tal que $Rm \in \mathcal{T}$ por lo que esta situación no sucede así que la igualdad se da.

□

Denotemos por $R - tors$ a la colección de teorías de torsión hereditarias, de igual forma que $R - TORS$, $R - tors$ es una clase ordenada parcialmente y de hecho es una gran retícula completa con respecto a este orden, y este es el objeto principal de estudio, las teorías de torsión hereditarias, por que estas son mas importantes para nuestros fines que las simples teorias de torsión, hay varias razones, una de ellas es que las clases de torsión hereditarias son fundamentales para metodos de localización en categorías (abelianas en nuestro caso), además que los metodos de teorías de torsión hereditarias nos permiten aislar fenomenos de cierta clase para despues darles un tratado meramente local y de ahí globalizar el fenomeno en cierta categoría de módulos. Otra razón mas para fijar nuestra atención en $R - tors$ es:

Teorema 1.1.9. $R - tors$ es un conjunto.

Demostración. Definamos una asignación inyectiva φ de $R - tors$ en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(R))$ como sigue $\tau \longmapsto \{I \in Sub_R(R) | R/I \in \mathcal{T}_\tau\}$. φ es inyectiva pues si τ y σ son teorías de torsión hereditarias tales que $\varphi(\tau) = \varphi(\sigma)$. Entonces sea $M \in \mathcal{T}_\tau$ entonces $an(m) \in \varphi(\tau)$ para todo $m \in M$ y entonces $an(m) \in \varphi(\sigma)$ es decir $M \in \mathcal{T}_\sigma$, es decir, $\mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_\sigma$ la otra contención es analoga. Por lo tanto $\mathcal{T}_\tau = \mathcal{T}_\sigma$ en otras palabras $\tau = \sigma$.

□

Con este resultado podemos ya llamarle retícula completa a $R - tors$, el tratado retícular veremos que tendra repercusiones importantes en la estructura del anillo en cuestión. Pero antes veamos por que la clase de inyectivos en $R - Mod$ es sumamente importante en el estudio de $R - tors$.

Teorema 1.1.10. Una teoría de torsión es hereditaria si y solo si está es la teoría de torsión cogenerada por un módulo inyectivo.

Demostración. Sea τ una teoría de torsión y E un inyectivo tal que $(\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau) = \left(\mathcal{T}^E, \mathcal{F}^E\right) = \tau^E$. Tenemos que $\mathcal{T}^E = \{M | Hom(M, E) = 0\}$, entonces sea $M \in \mathcal{T}^E$ y N un submódulo de M supongamos que hay un morfismo no cero de N en E digamos f entonces como E es inyectivo, f se exitende a un morfismo no cero $\bar{f}$ de M en E lo cual es una contradicción por lo tanto τ^E es hereditaria.

Si ahora suponemos que $\tau = (\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ es hereditaria veamos que esta cogenerada por un módulo inyectivo. Pongamos

$$E = \prod \{E(R/I) | R/I \in \mathcal{F}_\tau\}$$

Afirmamos que $\tau = \tau^E$. Como $\tau^E = \left(\mathcal{T}^E, \mathcal{F}^E\right)$ es hereditaria entonces $\mathcal{F}^E$ es cerrada bajo capsulas inyectivas y productos entonces $E \in \mathcal{F}_\tau$ por lo que $Hom(M, E) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}_\tau$ es decir, $\mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}^E$, ahora si existe un $M \in \mathcal{T}^E$ tal que $M \notin \mathcal{T}_\tau$ entonces $t_\tau(M) \neq M$ por lo que $M/t_\tau(M)$ es no cero y pertenece a $\mathcal{F}_\tau$, sea $\bar{m} \in M/t_\tau(M)$ no cero por lo tanto existe un monomorfismo $\bar{\varphi}$ de $M/t_\tau(M)$ en E pero como $M \in \mathcal{T}^E$ por lo tanto $M/t_\tau(M) \in \mathcal{T}^E$, es decir, $Hom(M/t_\tau(M), E) = 0$ lo cual es una contradicción por lo que forzosamente $M = t_\tau(M)$ y así $M \in \mathcal{T}_\tau$.

□

Proposición 1.1.11. Consideremos la teoría de torsión cogenerada por un inyectivo E. Entonces un módulo M es libre de torsión si y sólo si M es submódulo de un producto de copias de E

Demostración. Claramente todo submódulo de un producto de copias de E, digamos E^I es libre de torsión.

Si M es libre de torsión entonces consideremos un elemento $m \in M$ no cero y el cíclico Rm, este no es de torsión para toda m no cero y asi el $Hom(Rm, E) \neq 0$, es decir, existe $\mu : M \to E$ no cero y asi se tiene un morfismo que resulta ser inyectivo $\eta : M \to E^I$ donde $I = Hom(M, E)$ dado por $\eta(m) = (\mu(m))_I$.

□

Veamos algunos ejemplos de lo anterior.

(1) Un cogenerador inyectivo de $R - Mod$ es lo mismo que un inyectivo cogenerador de la teoría de torsión $(0, R - Mod)$.

Para el siguiente ejemplo necesitamos algunas definiciones y resultados de anillos de fracciones.

Recordemos que un subconjunto S de un anillo R es multiplicativo si $1 \in S$ y dados $a, b \in S$ entonces $ab \in S$

Definición 1.1.12. Sea R un anillo con uno y S un subconjunto multiplicativo de R, un anillo de fraciones izquierdo con respecto a S, es un par $(S^{-1}R, \varphi)$ donde $S^{-1}R$ es un anillo y un morfismo de anillos $\varphi : R \to S^{-1}R$ que satisface:

i) $\varphi(s)$ es invertible para todo $s \in S$.

ii) Todo elemento en $S^{-1}R$ es de la forma $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$.

iii) $\varphi(a) = 0$ si y sólo si $sa = 0$ para algún $s \in S$.

Y de está definición se ve que si existe un anillo de fracciones para R con respecto a S este cumple la situación:

Proposición 1.1.13. Sea R un anillo y S un subconjunto multiplicativo de R, supongamos que existe el anillo de fracciones con respecto a S, $S^{-1}R$, entonces para cualquier morfismo de anillos $\psi : R \to B$ tal que

$\psi(s)$ es invertible en B para todo $s \in S$, existe un único morfimo de anillos $\hat{\psi} : S^{-1}R \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\hat{\psi}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos $\hat{\psi}(\varphi(a)\varphi(s)^{-1}) = \psi(a)\psi(s)^{-1}$. Veamos que $\hat{\psi}$ esta bien defnida.

supongamos que $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(b)\varphi(t)^{-1}$ entonces $\varphi(a) = \varphi(b)\varphi(t)^{-1}\varphi(s) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(y)^{-1}$ para algún $C \in R$ y $u\, inS$ por $ii)$ de la definición. Entonces $\varphi(a)\varphi(u) = \varphi(b)\varphi(c)$ y $\varphi(s)\varphi(u) = \varphi(t)\varphi(c)$ entonces $\varphi(au - bc) = 0$ si y solo si $auv = acv$ $\varphi(su - tc) = 0$ si y solo si $suv^{'} = tcv^{'}$ para algunos $v, v^{'} \in S$ como $\psi(v)$ y $\psi(v^{'})$ son invertibles entonces $\psi(a)\psi(u) = \psi(b)\psi(c)$ y $\psi(s)\psi(u) = \psi(t)\psi(c)$ y regresando con estas igualdades tenemos que $\psi(a)\psi(s)^{-1} = \psi(b)\psi(t)^{-1}$. Y así esta bien defnido y claramente es morfismo y hace el triangulo conmutar.

□

Corolario 1.1.14. Si $S^{-1}R$ y RS^{-1} existen, entonces son isomorfos.

En general si tenemos un conjunto multiplicativo S de un anillo R nos preguntamos cuando existe el anillo de fracciones izquierdo de R con respecto a S, el siguiente teorema nos da condiciones sobre S para que $S^{-1}R$ exista.

Teorema 1.1.15. Sea S un subconjunto multiplicativo de R. $S^{-1}R$ existe si y sólo si S satisface las condiciones:

$S1)$ Si $s \in S$ y $r \in R$, entonces existe $t \in S$ y $b \in R$ tal que $rt = bs$.

$S2)$ Si $as = 0$ con $s \in S$, entonces $ta = 0$ para algún $t \in S$.

Demostración. Supongamos que $S^{-1}R$ existe sea $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} \in S^{-1}R$ entonces este elemento es de la forma $\varphi(t)^{-1}\varphi(b)$ para algún $t \in S$ y $b \in R$ entonces $\varphi(ta - bs) = 0$ y así $r(ta - bs) = 0$ para algún $r \in S$ por lo que $(rt)a = (rb)s$. Si $as = 0$ entonces $\varphi(a)\varphi(s) = 0$ o $\varphi(a) = 0$ entonces existi $t \in S$ tal que $ta = 0$.

Ahora supongamos que el conjunto multiplicativo cumple las condiciones $S1$ y $S2$. Consideremos el producto cartesiano de S y R, $S \times R$ y en el definamos la siguiente relación $\sim$:

$$(s, x) \sim (t, y) \Leftrightarrow \text{ existen a,b } \in R \text{ tal que } as = bt \text{ y } ax = by$$

esta relación resulta ser de equivalencia (ejercicio), denotemos al conjunto de clases de equivalencia $S \times R/ \sim := S^{-1}R$ y dotemos a este una estructura de anillo con las siguientes operaciones

$$x/s + y/t := ax + by/u$$

donde $a, b \in R$ son tales que $u = as = bt \in S$ y

$$x/s \cdot y/t := x_1 y/t_1 s$$

donde $t_1 x = x_1 t$ $t_1 \in S$ y $x_1 \in R$, aqui estamos pensando una clase de equivalencia $[x, t]$ como x/t y definimos la siguiente función $\varphi : R \to S^{-1}R$ como $a \mapsto a/1$. Todo lo anterior esta bien definido, es decir, no depende de la elección de los representantes (ejercicio) esto se verifica usando $S1$ y $S2$, y que φ sea morfismo es igual.

$\square$

Un subconjunto multiplicativo que cumple $S1$ y $S2$ se llama *denominador izquierdo* .

Ahora extendemos nuestra construcción de anillos de fracciones izuierdos a la categoría de módulos sobre R como sigue. Dado un módulo izquierdo M y S un conjunto de denominadores izquierdo definimos el *módulo de fracciones* conrespecto a S como $S^{-1}M := S^{-1}R \otimes_R M$ con su estructura canonica de módulo sobre $S^{-1}R$ esta definición tiene sentido en vista de :

Proposición 1.1.16. El R-morfismo canonico $\mu_M : M \to S^{-1}M$ tiene la siguiente propiedad universal:

Para cada módulo izquierdo N sobre $S^{-1}R$ y cada R-morfismo $\alpha : M \to N$ existe un unico $S^{-1}R$-morfismo $\sigma : S^{-1}M \to N$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "\alpha"'] & S^{-1}M \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración se sigue del hecho de la adjunción izquierda del producto tensorial con el $Hom(\_)$. $\square$

Proposición 1.1.17. $S^{-1}M \cong S \times M/ \sim$ donde $\sim$ esta definida como:

$$(s, x) \sim (t, y) \Leftrightarrow \text{ existen a,b } \in R \text{ tal que } as = bt \text{ y } ax = by \in S$$

Demostración. La prueba es similar que en 1.1.15 solo se verifica que $S \times M/ \sim$ resuelve el problema universal de 1.1.16, las operaciones en $S \times M/ \sim$ se definen como

$$x/s + y/t := ax + by/u$$

donde $a, b \in R$ son tales que $u = as = bt \in S$ usando $S1$ y

$$b/t \cdot x/s := tu/xc$$

donde $b/t \in S^{-1}R$ y $cs = ub \in S$ y $u \in S$

□

Corolario 1.1.18. El nucleo de $\mu_M : M \to S^{-1}M$ consiste de los $x \in M$ para los cuales existe $s \in S$ tal ue $sx = 0$

De este colorario tenemos que $t(M)_S = \{x \in M | sx = 0 \text{ para algún } s \in S\}$ es un submódulo de M llamado el submódulo de *S-torsión*. Un módulo M es un módulo de S-torsión si $t(M)_S = M$, es decir, $S^{-1}M = 0$ y es libre de S-torsión si $t(M)_S = 0$.

Lemma 1.1.19. $M/t(M)_S$ es libre de S-torsión.

Demostración. La prueba es sencilla □

Con esto en mente tenemos una teoría de torsión asociada a cada subconjunto multiplicativo del anillo S que cumpla $S1$ y $S2$. Mas adelante veremos cuando estas teorias de torsión son hereditarias.Mientras tenemos un caso particular pero importante.

(2) Sea R conmutativo y $\wp$ un ideal primo, entonces el complemento de $\wp$ es un subconjunto multiplicativo de R y como R es conmutativo entonces siempre se satisfacen $S1$ y $S2$. En este caso la S-torsión es una teoría de torsión hereditaria ya que esta cogenerada por $E(R/\wp)$, pues si $x \in R/\wp$ es no cero entonces su anulador esta contenido es $\wp$ y así $R/\wp$ es libre de S-torsión por lo que $E(R/\wp)$ es libre de S-torsión. Ahora si $Hom(M, E(R/\wp)) = 0$ entonces ena nulador de x no esta contenido en $\wp$ para toda x no cero en M (por lo anterior), es decir, M tiene S-torsión.

1.2. Topolgias Lineales

En esta sección introduciremos otro invariante asociado a un anillo R, este invariante consiste de un subconjunto de ideales izquierdos de R tales forman un filtro (de Gabriel) de tal forma que el anillo adquiere una estructura de anillo topologico, estos filtros estan asociados a teorías de torsión (hereditarias), más aún veremos que hay una biyección entre estas clases. Los filtros de Gabriel consituyen otro invariante importante en el estudio de anillos esto se vera reflejado en ciertos teoremas de estructura que se veran mas adelante. Primero motivemos nuestros objeto de estudio.

Consideremos una Teoría de torisón hereditaria $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ y consideremos la siguiente familia de ideales izquierdos de R

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}} = \{_R I | R/I \in \mathcal{T}\}$$

Primero notemos que este conjunto claramente no es vacío puesto que el módulo cero vive en $\mathcal{T}$ es decir $R/R \in \mathcal{T}$ y así $R \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$. Por otro lado consideremos un ideal izquierdo en $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$, digamos I y definamos para toda $a \in R$ el morfismo de $R \xrightarrow{\hat{a}} R$ dado por $r \mapsto ra$, compongamos este morfismo con la proyección canonica de R en R/I, $R \xrightarrow{\rho} R/I$, así tenemos el morfismo $R \xrightarrow{f_a} R/I$ donde $f_a = \hat{a}\rho$ y fijemonos en su núcleo $Nucf_a = r \in R|\bar{ra} = 0 = r \in R|ra \in I = (I : a)$ y como $R/Nucf_a \cong Imf_a \subseteq R/I$ entonces $R/(I : a)$ se inyecta en R/I pero $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y así $R/(I : a) \in \mathcal{T}$ por lo tanto $(I : a) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ para todo $a \in R$.

Ahora dado $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ supongamos que existe un $H \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tal que $(I : a) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ para todo $a \in H$ como $H/I \cap H \cong (I + H)/I$ tenemos la siguiente sucesión exacta corta (*):

$$0 \longrightarrow H/I \cap H \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + H) \longrightarrow 0$$

Como tenemos el epimorfismo canonico de R/H en $R/(I + H)$ y $R/H \in \mathcal{T}$ entonces $R/(I + H) \in \mathcal{T}$. Por otro lado notemos que si $r \in H$ entonces $(I \cap H : r) = (I : r) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y por hipotesis $R/(I \cap H : r) \in \mathcal{T}$ para todo $r \in H$ y del isomorfismo $R/(I \cap H : r) \cong Rr/(I \cap H)$ por lo que $Rr/I \cap H \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ para todo $r \in H$ y entonces $\bigoplus_{r \in H}(Rr/I \cap H) \in \mathcal{T}$ y así como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas y tambien como $H = \sum_{r \in H} Rr$ entonces $H/I \cap H = \sum Rr/I \cap H \in \mathcal{T}$ entonces $H/I \cap H \in \mathcal{T}$ por lo tanto $I \cap H \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y asi de la sucesión excacta corta (*) como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones se tiene que $R/I \in \mathcal{T}$ es decir, $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$.

También notemos que es claro que $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ es cerrada bajo intersecciones y si $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tal que se tiene un ideal izquierdo J tal que $I \subseteq J$ entonces $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$.

Hemos notado entonces que la familia $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ cumple:

- T1 Si $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tal que se tiene un ideal izquierdo J tal que $I \subseteq J$ entonces $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$.
- T2 Si $I, J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces $I \cap J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$
- T3 Si $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y $r \in R$ entonces $(I : r) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$
- T4 Si I es un ideal izquierdo de R y si existe $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tal que $(I : b) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ para todo $b \in J$ entonces $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$

Justamente este $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ cumple las propiedades de ser un filtro de Gabriel o Idempotente entonces para estudiar estos objetos intrudzacamos terminología que será útil en algún momento.

Un grupo abeliano topologíco G es un grupo junto con una topología tal que $+ : G \times G \to G$ y $\mu : G \to G$ son continuas donde $\mu(g) = -g$ para cualquier $g \in G$. Dado $a \in G$ la traslación $x \mapsto a + x$ es un homeomorfismo entonces U es vecindad de a si y sólo si $U - a$ es vecindad del cero. Entonces basta considerar vecindades del cero. Ahora un grupo topologico esta totalmente determinado por un filtro η alrededor del cero este satisface:

N1 Para todo $U \in \eta$ existe $V \in \eta$ tal que $V + V \subseteq U$

N2 $U \in \eta$ entonces $-U \in \eta$

Entonces tenemos que si G es un grupo abeliano con un filtro η tal que cumple N1 y N2 entonces G es un grupo topológico.

Un anillo topológico R es un grupo abeliano topológico tal que el producto en R es una función continua.Como $ab - a_0b_0 = (a - a_0)(b - b_0) + (a - a_0)b_0 + a_0(b - b_0)$ entonces la continuidad del producto basta perdirla en el cero de R, ahora bien el filtro de la parte aditiva de R debe de comportarse bien con el producto, es decir, debe de satisfacer:

N3 Para todo $r \in R$ y $U \in \eta$ existe $V \in \eta$ tal que $rV \subseteq U$ y $Vr \subseteq U$

N4 Para todo $U \in \eta$ existe $V \in \eta$ tal que $VV \subseteq U$

Un anillo topológico R es un anillo *topológico lineal izquierdo* si existe un sistema fundamental de vecindades del cero consistente de ideales izquierdos. El conjunto de ideales izquierdos abiertos $\mathfrak{F}$ satisface:

T1 Si $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tal que se tiene un ideal izquierdo J tal que $I \subseteq J$ entonces $J \in \mathfrak{F}$.

T2 Si $I, J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces $I \cap J \in \mathfrak{F}$

T3 Si $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y $r \in R$ entonces $(I : r) \in \mathfrak{F}$

Los primeros dos axiomas dicen que $\mathfrak{F}$ es un filtro y el tercero se infiere directamente de N3. Conversamente si tenemos un conjunto de ideales izquierdos que satisfacen T1, T2 y T3, entonces existe una única topologia lineal izquierda con $\mathfrak{F}$ como sistema fundamental de vecindades alrededor del cero. Cabe resaltar que en estas notas solo nos fijaremos en topologias definidas por ideales izquierdos y por submódulos. Dado un módulo izquierdo M sobre un anillo topologico lineal izquierdo con $\mathfrak{F}$ el conjunto de ideales izquierdos abiertos, definimos una topología lineal izquierda en M como un subconjunto de submódulos de M tales que:

TM1 $L \subseteq K$ submodulos y L es abierto entonces K lo es.

TM2 Si L y K son abiertos entonces $L \cap K$ también.

TM3 Si L es abierto y $x \in M$ entonces $(L : x) \in \mathfrak{F}$

En particular para un módulo M sobre R existe una topología lineal izquierda mas fuerte tal que M es un módulo topologico lienal, esta topología es

$$\mathfrak{F}(M) = \{L \subseteq M | (L : x) \in \mathfrak{F} \text{ para todo } x \in M\}$$

$\mathfrak{F}(M)$ satisface claramente TM1 y TM2 pues $\mathfrak{F}$ satisface T1 y T2, y TM3 tambien . Esta topología es llama la $\mathfrak{F}$-topología en M. El módulo M es un módulo topologico lineal bajo su topología discreta si y solo si el anulador izquierdo de todo elemento de M, $an(x)$ pertenece a $\mathfrak{F}$. Diremos que M es $\mathfrak{F}$-discreto si su $\mathfrak{F}$-topologia es discreta.

Lemma 1.2.1. La clase de módulos $\mathfrak{F}$-discretos es una clase de pretorsión hereditaria.

Demostración. M es $\mathfrak{F}$-discreto si y sólo si $an(x) \in \mathfrak{F}$ por lo tanto todo submódulo N de M es $\mathfrak{F}$-discreto.

Sea N un submódulo de M supongamos que N y M son $\mathfrak{F}$-discretos, veamos que M/N es $\mathfrak{F}$-discreto.

Tomemos un elemento $\bar{x} \in M/N$ entonces $an(\bar{x}) \supseteq an(x)$ y como por hipotésis $an(x) \in \mathfrak{F}$ entonces $an(\bar{x}) \in \mathfrak{F}$ por $T1$ por lo tanto M/N es $\mathfrak{F}$-discreto.

Para ver que es cerrada bajo sumas directas, dada una familia $M_{\alpha \alpha\in\Lambda}$ de módulos $\mathfrak{F}$-discretos solo hay que notas que si tomamos un elemento del coproducto $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, digamos $(x_\alpha)_\alpha$ entonces su anulador es igual ala intersección de los anuladores de cada coordenada y cada uno de ellos pertenece a $\mathfrak{F}$.

$\square$

Entonces en vista del lema anterior a la clase de los módulos $\mathfrak{F}$-discretos le corresponde un prerradical exacto izquierdo a saber :

$$t(M) = \{x \in M | an(x) \in \mathfrak{F}\} = \sum \{N|N \text{ es } \mathfrak{F} - discretos\}$$

Teorema 1.2.2. Existe una biyección entre :

(1) Topologias lienales izquierdas en R.

(2) Clases de pretorsión hereditarias en $R - Mod$.

(3) Prerradicales exactos izquierdos.

Demostración. Anteriormente ya se demostro (2) $\Leftrightarrow$ (3)

Veamos (1) $\Leftrightarrow\Leftrightarrow$ (2) Primero note que dado cualquier filtro lineal izquerdo $\mathfrak{F}$, pongamos $\mathcal{C}_\mathfrak{F} = \{M | an(x) \in \mathfrak{F}\ \forall x \in M\}$, esta clase de módulos es de pretorsión hereditaria (ejercicio) y así si tomamos $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}_\mathfrak{F}} = \{_RI|R/I \in \mathcal{C}_\mathfrak{F}\} = \{_RI|(I : a) \in \mathfrak{F}\ \forall a \in R\} = \mathfrak{F}$. Ahora si consideramos una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{C}$, se tiene que si $\mathfrak{F}_\mathcal{C} = \{I|R/I \in \mathcal{C}\} = \{M|an(x) \in \mathfrak{F}\ \forall x \in M\} = \{M|$ todo ciclíco de M pertenece a $\mathcal{C}\}$ es facíl probar que esto consituye una topología linal izquierda. basicamente la prueba es identica a la que se hizo en la introducción de esta sección.

$\square$

Ejemplos

(1) *Topologias Separadas*

Un Grupo topologico se llama *separado* si todo punto es cerrado. Una Topología lineal $\mathfrak{F}$ es separada si y solo si $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} = 0$. Esto es sencillo ya que si suponemos que $\mathfrak{F}$ es separada, tomemos un $x \in \bigcap_{I\in\mathfrak{F}}$ entonces para cuqluier otro punto en el anillo y el conjunto y es cerrado por hipotésis y asi tenemos que existe un $I \in \mathfrak{F}$ tal que $I + x \subseteq R - y$, entonces si x es distinto de cero se tiene que para este I $x \notin I$ lo cual es un absurdo. Si la intersecciónbn es cero, sean $x, y \in R$ distintos entonces su diferencia es distinta del cero y así existe un ideal izquierdo I en $\mathfrak{F}$ tal que la diferencia no pertenece a I, es decir x no esta en el abierto $I + y$ por lo tanto x es cerrado.

(2) *Topología I-ádica* Sea I un ideal bilateral de un anillo R, las potencias I^n forman una base para una topología lineal en R, que usualmente se llama la topología I-ádica, estas topologias son importantes en el caso conmutativo para procesos de completaciones en anillo de valuación discreta y anillos Henselianos. De igual forma que en el ejemplos de arriba la topología I-ádica es separada si y solo si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$

1.3. Topolgias de Gabriel

Una familia no vacía $\mathfrak{F}$ de ideales izquierdos de un anillo R es un filtro de Gabriel si $\mathfrak{F}$ cumple T3 (de los axiomas de toplogía lineal izquierda) y T4

Si${}_R I$ es un ideal izquierdo de R y si $\exists J \in \mathfrak{F}$ tal que $(I : b) \in \mathfrak{F}\, \forall b \in J \Rightarrow I \in \mathfrak{F}$

Proposición 1.3.1. Si $\mathfrak{F}$ es filtro de Gabriel entonces esté satisface T1 y T2 de la definición de topología lineal

Demostración. Primero obsevermos que $R \in \mathfrak{F}$ por T3 ya que si $I \in \mathfrak{F}$ y $r \in I$ entonces $(I : a) \in \mathfrak{F}$, pero $(I : r) = R$ si $r \in I$, ahora si $I \subseteq H$ e $I \in \mathfrak{F}$ entonces para todo $r \in I \subseteq H$ se tiene que $(H : r) = R \in \mathfrak{F}$ por lo tanto $(H : r) \in \mathfrak{F}$ para toda $R \in I \in \mathfrak{F}$ entonces por T4 se tiene que $H \in \mathfrak{F}$ por lo tanto se cumple T1.

Para T2, tomemos $I, H \in \mathfrak{F}$, entonces para cada $b \in H$ como $R = (H : b)$ y así

$((I \cap H) : b) = (I : b) \cap (H : b) = (I : b) \cap R = (I : b) \in \mathfrak{F}$ pues $I \in \mathfrak{F}$ es decir, $((I \cap H) : b) \in \mathfrak{F}$ y esto para toda $b \in H \in \mathfrak{F}$ por T4 se tiene que $I \cap H \in \mathfrak{F}$. □

Proposición 1.3.2. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro de Gabriel. Si I y H son elementos de $\mathfrak{F}$ entonces su producto IH está en $\mathfrak{F}$

Demostración. Para cada $a \in H$ tenemos que $(IH : a) \supseteq I \in \mathfrak{F}$ por lo tanto $(IH : a) \in \mathfrak{F}$ y esto para toda $a \in H$ y $H \in \mathfrak{F}$ por T4 se tiene que $IH \in \mathfrak{F}$. □

Proposición 1.3.3. Sea I un ideal izquierdo de R. El conjunto de ideales izquierdos de R que contienen a I es un filtro de Gabriel si y solo si I es bilateral e idempotente.

Demostración. $\Rightarrow$ Si $\mathfrak{F} = \{{}_R H | I \subseteq H\}$ es un filtro, como $I \in \mathfrak{F}$ entonces $(I : a) \in \mathfrak{F}$ para toda $a \in R$, es decir, $(I : a) \supseteq I$ entonces $Ia \subseteq I$ para toda $a \in R$ por lo tanto I es bilateral.

Ahora $I \in \mathfrak{F}$ entonces $II = I^2 \in \mathfrak{F}$ (por 1.3), es decir, $I^2 \supseteq I$

$\Leftarrow$

$\mathfrak{F} = \{_R H | I \subseteq H\}$ con I idempotente y bilateral, primero notemos que $\mathfrak{F}$ es no vacío pues $I \supseteq I$ y así $I \in \mathfrak{F}$.

Sea $H \in \mathfrak{F}$ entonces como I es bilateral se tiene que para todo $r \in R$ $Ir \subseteq I \subseteq H$ por lo tanto $(H : r) \supseteq I$, es decir, $(H : a) \in \mathfrak{F}$ por lo tanto se cumple T3.

Para T4 sea K un ideal izquierdo de R y supongamos que existe $H \in \mathfrak{F}$ tal que $(K : b) \in \mathfrak{F}$ para toda $b \in H$, entonces $(K : b) \supseteq I$, es decir, $Ib \subseteq K$ para todo $b \in I$ entonces $II = I^2 \subseteq K$ por lo tanto $I \subseteq K$, es decir, $K \in \mathfrak{F}$

□

La siguiente proposición es justo lo que se probo en el incio de la sección anterior.

Proposición 1.3.4. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = \tau$ una teoría de torsión en $R-Mod$ entonces

$$\mathfrak{F}_\tau = \{_R I | R/I \in \mathcal{T}\}$$

Es un filtro de Gabriel.

□

Proposición 1.3.5. Si $\mathfrak{F}$ es un filtro de Gabriel en R, entonces existe una teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = \tau$ en $R - Mod$ tal que

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\mathcal{T}$$

Demostración. Definimos el siguiente funtor

$$R - mod \xrightarrow{t} R - Mod$$

Como sigue, a cada módulo izquierdo M, $t(M) = m \in M | (0 : m) \in \mathfrak{F}$ y en morfismos se calcula como restricción.

Afirmación: t así definido es un radical exacto izquierdo.

Primero veamos que prerradical, para esto sea $M \xrightarrow{\varphi} N$ un R-morfismo entonces $(0 : x) \subseteq (0 : \varphi(x))$ ya que si $r \in (0 : x)$ entonces $r\varphi(x) = \varphi(rx) = \varphi(0) = 0$, si $x \in t(M)$ entonces $(0 : x) \in \mathfrak{F}$ y como $\mathfrak{F}$ es de Gabriel entonces por T4 $(0 : \varphi(x)) \in \mathfrak{F}$ y así $\varphi(x) \in t(N)$.

Para la exactitud por la izquierda. Tomemos un $N \subseteq M$ un submódulo de M entonces $t(N) \subseteq t(M)$ y así $t(N) \subseteq N \cap t(M)$, y si $x \in N \cap t(M)$ entonces $(0 : x) \in \mathfrak{F}$ y así $x \in t(N)$.

Por último t es radical, para esto sea $\bar{x} \in t(M/t(M))$ entonces $(0 : \bar{x}) \in \mathfrak{F}$, es decir, $(0 : \bar{x}) = (t(M) : x) \in \mathfrak{F}$, $(t(M) : x) = \{r \in R | rx \in t(M)\} = \{r \in R | (0 : rx) \in \mathfrak{F}\} = \{r \in R | ((0 : x) : r) \in \mathfrak{F}\}$ por lo tanto $x \in t(M)$ y así $x \in t(M)$ por lo que $\bar{x} = 0$. De donde t es radical.

Siendo t radical exacto izquerdo por (resultado que debe de ir antes) a t le corresponde una teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ y pongamos $\mathfrak{F}_\mathcal{T} = \{_R I | R/I \in \mathcal{T}\}$, veamos que

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\mathcal{T}$$

En efecto primero, sabemos que $\mathcal{T} = \{M | t(M) = M\} = \{M | (0 : m) \in \mathfrak{F}\ \forall m \in M\}$, entonces si $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$, se tiene que $R/I \in \mathcal{T}$ entonces $(0 : \bar{a}) \in \mathfrak{F}$ para toda $\bar{a} \in R/I$ entonces $I = (0 : \bar{1}) \in \mathfrak{F}$ por lo que $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathfrak{F}$. Por otro lado si $I \in \mathfrak{F}$ entonces $(I : a) \in \mathfrak{F}$ para toda $a \in R$ por que $\mathfrak{F}$ es filtro. Pero $(I : a) = (0 : \bar{a})$, $\bar{a} \in R/I$ por lo que $(0 : \bar{a}) \in \mathfrak{F}$ para toda $\bar{a} \in R/I$, es decir, $R/I \in \mathcal{T}$ y así $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$, y así $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$. Por lo tanto

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$$

□

Corolario 1.3.6. Existe una correspondecia biyectiva entre:

(i) Filtros de Gabriel en R.

(ii) Teorías de Torsión Hereditarias en R-Mod.

(iii) Radicales Exactos izquierdos en R-Mod.

Demostración. (ii)$\Leftrightarrow$ (iii) Ya lo tenemos (debe ir antes)

Para (i)$\Leftrightarrow$ (ii).

Tomemos una teoría de torsión hereditaria $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ entonces está determina un filtro de Gabriel $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}} = \{_R I | R/I \in \mathcal{T}\}$ y aun filtro de gabriel $\mathfrak{F}$ le asociamos

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{F}} = \{M | (0 : m) \in \mathfrak{F}\ \forall m \in M\}$$

Entonces

$$\mathfrak{F} \longmapsto (\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}, \mathcal{F}_{\mathfrak{F}}) = \tau_{\mathfrak{F}} \longmapsto \mathfrak{F}_{\tau_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F}$$

La última igualdad es por 1.3.5

Por otro lado tenemos

$$\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F}) \longmapsto \mathfrak{F}_{\tau} \longmapsto (\mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\tau}}, \mathcal{F}_{\mathfrak{F}_{\tau}}) = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$$

La última igualdad se tiene ya que, como $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\tau}} = \{M | (0 : m) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}\ \forall m \in M\}$ entonces si $M \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\tau}}$ por lo que $(0 : m) \in \mathfrak{F}_{\tau}$ entonces todo ciclíco $Rm \in \mathcal{T}$ para toda $m \in M$ por lo tanto como $\mathcal{T}$ es hereditaria $M \in \mathcal{T}$ y así $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\tau}} \subseteq \mathcal{T}$ para la otra contención, si $M \in \mathcal{T}$ entonces de nuevo todo ciclíco de M esta en $\mathcal{T}$, es decir, $R/(0 : m) \in \mathcal{T}$ y por lo tanto $(0 : m) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\tau}}$, es decir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathfrak{F}_{\tau}}$.

□

Ejemplos:

(1) *1-topologias*

Una 1-Topología en R es una topología de Gabirel con una base consistente de ideales principales. Una 1-topología $\mathfrak{F}$ esta determinada por el conjunto $\sum(\mathfrak{F}) = \{s \in R | Rs \in \mathfrak{F}\} \subseteq Sub_R(R)$, en el sentido:

Proposición 1.3.7. La asociación

$$\mathfrak{F} \longrightarrow \sum(\mathfrak{F})$$

Define una biyección entre 1-topologías $\mathfrak{F}$ en R y subconjuntos multiplicativos S de R tales que satisfacen las condiciones de Ore, es decir,

S0 Si $ab \in S$ entonces $a \in S$.

S1 Si $s \in S$ y $a \in R$ entonces existe un $t \in S$ y $b \in R$ tal que $bs = ta$

Demostración. Suponga que $\mathfrak{F}$ es una 1-topología, entonces $\sum(\mathfrak{F}) = \{s \in R|Rs \in \mathfrak{F}\}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado ya que si $s, t \in \sum(\mathfrak{F})$ entonces $(Rst : as) \supseteq (Rs : as)$ para todo $a \in R$ y como $(Rs : as) \in \mathfrak{F}$ entonces por T3 se tiene que $(Rst : as) \in \mathfrak{F}$,m es decir,$Rst \in \mathfrak{F}$ por T4 y así $st \in \sigma(\mathfrak{F})$, además por T1 se sigue S0 y s1 se tiene por T3 ya que $(Rt : a) \supseteq Rs$ para algún $Rs \in \mathfrak{F}$.

Reciprocamente si S es multiplicativo de R y cumple S0 y S1 entonces, pongamos

$$\mathfrak{F} = \{_R I | I \cap S \neq \emptyset\}$$

Veamos que es una 1-topología.

Cumple T3. Sea $I \in \mathfrak{F}$ y $r \in R$ entonces por un lado tenemos que $I \cap S \neq \emptyset$ y así existe $x \in I \cap S$ y $r \in R$ tal que para algún $t \in S$ y $b \in R$ se tiene que $bx = ta$ y entonces $bx \in I$ y así $at \in I$, en otras palabras, $t \in (I : a)$ por lo tanto $(I : a) \in \mathfrak{F}$. Para T4. Pongamonos en la situación, es decir, $(I : b) \in \mathfrak{F}$ para toda $b \in J$ con $j \in \mathfrak{F}$, veamos que $I \in \mathfrak{F}$, tenemos que $(I : b) \cap S \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in (I : b) \cap S$ y es tal que, $bx \in I$ y $x \in S$ por otro lado, $J \cap S \neq \emptyset$ y asi existe $b \in J \cap S$ tal que $xb \in I \cap S$ por lo que $I \in \mathfrak{F}$. Por último note que $\{Rs|s \in S\}$ es una base para $\mathfrak{F}$.

□

Para una 1-topología $\mathfrak{F}$, los módulos de $\mathfrak{F}$-torsión M pueden ser caracterizados por la propiedad, para todo $x \in M$ existe un $t \in \sum(\mathfrak{F})$ tal que $sx = 0$, el lector notara que esta torsión es justamente la mencionada en los ejemplos despues de 1.1.18

2 *La teoría de torsión de Goldie*

Denotemos por $\mathfrak{G}$ a la familia de ideales izquierdos esenciales de un anillo R, es claro que $\mathfrak{G}$ forma una topología lineal izquierda en R pero en general no satisface T4, arreglemos este "defecto", primero tenemos asociado a $\mathfrak{G}$ un preradical exacto izquierdo, denotado por Z, llamado *la parte singular* de un módulo M, ahora en la reticula de topologias lineales en R, $Top(R)$ podemos a una topología arbitraria asociarle la topología de gabriel mas debil entre las topologias de grabriel mas fuertes que la topología lineal dada, este es un operador de cerradura en $Top(R)$, con esto en mente a $\mathfrak{G}$

le asociamos tal topología de gabriel, denotada por $\mathfrak{G}_Z$, en vista de 1.3.6 a $\mathfrak{G}_Z$ le corresponde un radical exacto izquierdo G, de hecho es el menor radical que esta por arrida de Z, de hecho tenemos que:

Proposición 1.3.8.

$$G = Z_2$$

Demostración. Como $Z(M)$ es un submódulo esencial de $G(M)$ para toda M, entonces tenemos que $G(M)/Z(M)$ es singular por lo que

$$Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M)) \supseteq G(M)/Z(M)$$

de donde tenemos que $G(M) = Z(M)$ para toda M. □

Mas adelante veremos que esta teoría de torsión juega un papel importante en la clasificación de ciertos anillos en especial cuando localizamos la categoría de modulos respecto a $\mathfrak{G}_Z$ se vera que esa categoria representa a muchas categorias en asbtracto.

3 *La topología Densa*

Consideremos un anillo R y asu capsula inyectiva $E(R)$, la teoría de torsión que cogenera $E(R)$ por 1.1.10 es hereditaria y así por 1.3.6 le corresponde un filtro de Gabriel $\mathfrak{D}$, los ideales de este se llaman *densos*, la teoría de torsión cogenerada por $E(R)$ se llama la teoría de torisón de Lambeck. Facilmente se prueba que esta topologia consiste de los ideales izquierdos tales que

$$\{_RI | Hom(R/I, E(R)) = 0\} = \{_RI | x(I : a) \neq 0 \ \forall a \in R\}$$

Proposición 1.3.9. Todo ideal denso de R es esencial.

Demostración. Sea I denso izqauierdo de R supongamos que existe un ideal izquierdo K de R tal que $I \cap K = 0$ entonces existe un monomorfismo de K en R/I lo cual es un absurdo puesto que R/I es de torsión de Lambeck y K es libre de torsión de Lamenbeck. Por lo tanto $K = 0$.

□

En general la teoría de torsión de Lambeck es menor o igual que la teoría de torsión de Goldie, pero cuando en anillo es no singular estas coinciden.

4 *Las topologias $\mathfrak{F}_M^n$*

SEa M un módulo izquierdo sobre R, consideremos la resolución minima inyectiva de M:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu_0} E_0 \xrightarrow{\mu_1} E_1 \xrightarrow{\mu_2} E_2 \xrightarrow{\mu_3} \cdots$$

Donde $E_0 = E(M)$ y E_{i+1} es la capsula inyectiva del conucleo de μ_i, denotemos por $\mathfrak{F}_M^n$ a la topología de gabriel correspondiente ala teoria de torisón cogenerada por el módulo inyectivo $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \ldots \oplus E_n$ Note que $\mathfrak{F}_M^0$ es la topología densa.

Proposición 1.3.10. Un módulo L es un módulo de $\mathfrak{F}_M^n$-torsión si y solo si $Ext_R^i(L^{'}, M) = 0$ para todos los $i \leq n$ y todos los submódulos (ciclicos) $L^{'}$ de L.

Demostración. Pongamos $M_i = Im\mu_i$, sabemos que un módulo L es de $\mathfrak{F}_M^n$-torsión si y solo si $Hom(L, E_i) = 0$ para $i \leq n$ esto es equivalente por 1.1.10 que para todo ciclico $L^{'}$ de L , el $Hom(L^{'}, M) = 0$ para todo $i \leq n$. Procedemos por inducción sobre n. Si $n = 0$ todo es claro. Ahora de la sucesión exacta corta (*):

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow E_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$$

Bajo el funtor $Hom(L^{'}, \_)$ con $i = n$ obtenemos

$$Hom(L^{'}, E_{n-1}) \longrightarrow Hom(L^{'}, M_n) \longrightarrow Ext^1(L^{'}, M_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Y de (*) también obtenemos

$$\cdots \longrightarrow Ext^{n-1}(L^{'}, M_{n-1}) \longrightarrow Ext^n(L^{'}, M_n) \longrightarrow Ext^n(L^{'}, E_{n-1}) \longrightarrow Ext^n(L^{'}, M_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

Por recursión sobre $n > i$ obtenemos que $Ext^n(L^{'}, M) \cong Ext^{n-1}(L^{'}, M_1) \cong Ext^{n-2}(L^{'}, M_2) \cong \ldots \cong Ext^1(L^{'}, M_{n-1}) \cong Ext^0(L^{'}, M_n)$ usando la hipiotésis de inducción obetenemos que un módulo M de $\mathfrak{F}_M^{n-1}$-torsión es de $\mathfrak{F}_M^n$-torsión si y solo si $Ext_R^n(L^{'}, M) = 0$ para todo submódulo cilico $L^{'}$ de L. □

El caso conmutativo es importante.

5 Sea R un anillo conmutativo. Denotemos por $Spec(R)$ al conjunto de ideales primos de R, para cada I ideal de R, denotemos por $V(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | I \subset \mathfrak{p}\}$, si $\mathfrak{p}$ es un primo, su complemento es un subconjunto multiplicativo de R, para un módulo M denotemos el módulo de fracciones de M con respecto a $S = R - \mathfrak{p}$ como $M_{\mathfrak{p}}$, la topología de Gabriel correspondiente es

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} = \{I | \mathfrak{p} \notin V(I)\}$$

Los módulos de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$-torsión M son caracterizados por la propiedad : $M_{\mathfrak{p}} = 0$. De manera mas general, si tenemos un subconjunto $\mathscr{P}$ de $Spec(R)$, a el le asociamos la siguiente topología de Gabriel:

$$\mathscr{P} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} = \{I | V(I) \cap \mathscr{P} = \emptyset\}$$

La correspondiente clase de torsión consiste de todos los módulos M tales que $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$. Reciprocamente si tenemos una topología de Gabriel en R, $\mathfrak{F}$ le asociamos el siguiente subconjunto de primos

$$D(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | \mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}\} \subseteq Spec(R)$$

entonces

$$\mathfrak{F}_{D(\mathfrak{F})} = \{I | V(I) \cap D(\mathfrak{F}) = \emptyset\} = \{I | V(I) \subseteq \mathfrak{F}\}$$

De estas observaciones tenemos:

Proposición 1.3.11. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una topología de Gabriel $\mathfrak{F}$ en un anillo conmutativo R.

(I) $\mathfrak{F}$ es igual a $\mathfrak{F}_{\mathscr{P}}$ para algún $\mathscr{P} \subseteq Spec(R)$.

(II) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{D(\mathfrak{F})}$.

(III) Para cada ideal $I \notin \mathfrak{F}$, existe un ideal $\mathfrak{p} \in V(I)$ tal que $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$.

□

Lemma 1.3.12. Sea $\mathfrak{F}$ una topología de Gabriel en R. Entonces:

(i) Si I es un ideal que es máximo con respecto a $I \notin \mathfrak{F}$, entonces I es primo.

(ii) Si $\mathfrak{F}$ tiene una base consistente de ideales finitamente generados y $I \notin \mathfrak{F}$, entonces existe $\mathfrak{p} \notin V(I)$ tal que $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{F}$.

Demostración. (i) supongamos que a y b son elementos de R que no pertenecen a I, entonces $I + Ra$ y $I + Rb$ deben de pertenecer a $\mathfrak{F}$ y así $(I + Ra)(I + Rb) \in \mathfrak{F}$ por 1.3.2, es decir, $ab \notin I$.

(ii) Como $I \notin \mathfrak{F}$ aplicando el lema de Zorn podemos encontrar un ideal $J \supseteq I$ tal que es máximo con respecto a no pertencer a $\mathfrak{F}$ por (i) J es primo.

□

De todo lo anterior obtenemos :

Corolario 1.3.13. Si $\mathfrak{F}$ es una topología de Gabriel consistente de una base de ideales finitamente generados, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathscr{P}}$ para un cierto $\mathscr{P} \subseteq Spec(R)$.

1.4. Teorías de Torsión Libres de Torsión

En esta sección estudiaremos ciertas clases de torsión que de alguna forma parten ala categoría de módulos sobre el anillo, estas teorias de torsión son importantes ya que en capitulo siguiente veremos como caracterizan a cierta clase de anillos.

Definición 1.4.1. Una clase de R-módulos $\mathcal{T}$ se llama *una clase de torsión libre de torsión* (TLT) si y solo si existen clases de módulos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{L}$ tales que $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ y $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ son teorías de torsión.

Observación

Si $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ es una terna TLT entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ es hereditaria ya que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo subobjetos ya que es la clase libre de la teoría $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$

Lo primero que se quisiera hacer es determinar cuando dada una terna TLT, $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$, la teoría de torsión $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ es hereditaria, o parafraseando esto cuando sucede $\mathcal{C} = \mathcal{L}$. Practicamente esta sección es justo contestar esto, entonces comenzamos con:

Proposición 1.4.2. Una clase de torsión hereditaria $\mathcal{T}$ es una clase TLT si y solo si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo productos directos.

Demostración. $\Rightarrow$

Si $\mathcal{T}$ es una clase TLT, entonces existen clases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{L}$ tales que $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ y $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ son teorías de torsión. Y así $\mathcal{T}$ es libre de $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ y por ende cerrada bajo productos.

$\Leftarrow$

Si $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria cerrada bajo productos directos y además es cerrada bajo cocientes, submódulos, extensiones y asi es cerrada bajo coproductos, entonces $\mathcal{T}$ es una clase de torsión y también es una clase libre de torsión por lo tanto es TLT.

$\square$

Proposición 1.4.3. Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria. Entonces $\mathcal{T}$ es una clase TLT si y solo si su filtro de Gabriel asociado $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tiene elemento menor.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $\mathcal{T}$ es TLT y $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ su filtro, entonces para cada $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ consideremos $R \xrightarrow{\rho_L} R/L$ el morfismo canónico en el cociente R/L entonces la familia de de estos morfismos para cada $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ inducen un morfismo $R \xrightarrow{\varphi} \prod\limits_{L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}} R/L$ y como $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$, entonces cada $R/L \in \mathcal{T}$ y así $\prod\limits_{L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}} R/L \in \mathcal{T}$ por ser $\mathcal{T}$ TLT por lo tanto $Im\varphi \in \mathcal{T}$ pero $Im\varphi \cong R/Nuc\varphi$ es decir, $Nuc\varphi \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y como $Nuc\varphi = \bigcap_{L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}} Nuc\rho_L \subseteq Nuc\rho_L = L$ y entonces $Nuc\varphi \subseteq L$ para todo $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y $Nuc\varphi \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$.

$\Leftarrow$ Si $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tiene elemento menor I, observemos que $M \in \mathcal{T}$ si y solo si $IM = 0$.

En efecto si $M \in \mathcal{T}$ entonces para todo $m \in M$ $(0 : m) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y como $I \subseteq (0 : m)$ erntonces $Im = 0$ para toda m por lo tanto $IM = 0$.

Reciprocamente si $IM = 0$ entonces $I \subseteq (0 : m)$ para toda m por lo tanto como $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ es filtro se tiene que $(0 : m) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y así $M \in \mathcal{T}$.

Con esto en mente en vista de la proposición anterior basta ver que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo prodcutos directos, para esto tomemos una familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$ entonces por la anterior observación para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $IM_\alpha = 0$ y así $I(\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha) = 0$ por lo que $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \in \mathcal{T}$

$\square$

Corolario 1.4.4. Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria. $\mathcal{T}$ es TLT si y solo si existe un ideal bilateral I tal que

$$\mathcal{T} = \{M | IM = 0\}$$

Demostración. Si $\mathcal{T}$ es TLT entonces por la proposición anterior su filtro asociado $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tiene elemento menor I, entonces

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}} = \{_R H | I \subseteq H\}$$

y asi $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ es filtro de Gabriel si y solo si I es bilateral e idempotente por lo tanto $M \in \mathcal{T}$ si y solo si $IM = 0$.

□

Corolario 1.4.5. Si R es artiniano izquierdo entonces toda clase de torsión hereditaria $\mathcal{T}$ es TLT.

Demostración. Todo filtro $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tiene elementos miniomos, si I_1 e I_2 son minimos en $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces $I_1 \cap I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces $I_1 = I_1 \cap I_2 = I_2$ por lo tanto $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ tiene elemento menor.

□

Si $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ es TLT denotemos por c al radical de torsión correspondiente de $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ y por t al radical de torsión de $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$.

Proposición 1.4.6. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ una teoría TLT e I es idal bilateral menor de $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces, $c(M) = IM$ para todo $M \in R - Mod$.

Demostración. Sabemos que $M/c(M) \in \mathcal{T}$ si y solo si $I(M/c(M)) = 0$, es decir, $IM \subseteq c(M)$ y como $I(M/IM) = 0$ entonces $M/IM \in \mathcal{T}$ pero $c(M)$ es el menor subobjeto de M tal que $M/c(M) \in \mathcal{T}$ y así $c(M) \subseteq IM$ como se deseaba.

□

Corolario 1.4.7. SI I es el ideal bilateral menor de $\mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces $I = c(R)$

Demostración. Por lo anterior $c(R) = IR$ pero siendo I bilateral se tiene que $IR = I$.

□

Proposición 1.4.8. Existe una biyección entre las clases TLT, $\mathcal{T}$ y los ideales bilaterales idempotentes I que anulan a los $M \in \mathcal{T}$

Demostración. Tenemos que para cada clase TLT $\mathcal{T}$, a esta le corresponde un ideal bilateral idempotente $I = c(R)$ tal que $\mathcal{T} = \{M | IM = 0\}$.

Reciprocamente, si I es bilateral e idempotente sea $\mathcal{T}_I = \{M | IM = 0\}$ entonces:

(i) $\mathcal{T}_I$ es cerrada bajo submódulos.

(ii) $\mathcal{T}_I$ es cerrada bajo proudctos directos .

(iii) $\mathcal{T}_I$ es cerrada bajo coproductos.

(iv) $\mathcal{T}_I$ es cerrada bajo cocientes.

y por último $\mathcal{T}_I$ es cerrada bajo extensiones ya que si tomamos una sucesión exacta corta con extremos en $\mathcal{T}_I$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

Entonces si I anula a K y a M/K entonces su cuadrado anula a M pero $I^2 = I$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}_I$

Ahora veamos que las correspondencias son una inversa de la otra.

Sea $\mathcal{T}$ TLT e $I = cR$ el ideal bilateral idempotente que le corresponde, y sea $\mathcal{T}_{cR} = \{M|(cR)M = 0\}$, tomemos $M \in \mathcal{T}$ entonces $c(M) = 0$ y así $c(M) = c(R)M$ por lo tanto $M \in \mathcal{T}_{cR}$.

Si $M \in \mathcal{T}_{cR}$ entonces $cR(M) = 0$ y así $c(M) = 0$ por lo que $M \in \mathcal{T}$.

Si I es un ideal bilateral idempotente y sea $\mathcal{T}_I = \{M|IM = 0\}$ la clase de torsión asociada a I y esta es la clase TLT correspondiente al radical de torsión de $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_I)$ por el corolario anterior tenemos que $cR = I$. Como se deseaba.

□

Proposición 1.4.9. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ una TLT si $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ es hereditaria entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$

Demostración. Sea t el radical de torsión de la teoría $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ y sea $M \in \mathcal{C}$, como $tM \subseteq M \in \mathcal{C}$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ es hereditaria entonces $tM \in \mathcal{C}$ pero $tM \in \mathcal{T}$ y así $tM \in \mathcal{C} \cap \mathcal{T} = 0$, es decir, $tM = 0$ en otras palabras $M \in \mathcal{L}$. □

Proposición 1.4.10. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ una teoría TLT entonces,

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C} \Leftrightarrow c(M/t(M)) = M/t(M) \text{ para todo módulo } M$$

Demostración. $\Rightarrow$

Sea $M \in R-Mod$ como $M/T(M) \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $c(M/t(M)) = M/t(M)$

$\Leftarrow$

Si $M \in \mathcal{L}$ entonces $t(M) = 0$ y por lo tanto $c(M) = C(M/t(M)) = M/t(M) = M$ por lo tanto $M \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$

□

Proposición 1.4.11. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ una teoría TLT entonces

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C} \Leftrightarrow M = c(M) + t(M) \text{ para todo módulo } M$$

Demostración. $\Rightarrow$

Sea $M \in R - Mod$ y consideremos el módulo $M/c(M) + t(M)$ entonces tenemos un epimorfismo

$$M/c(M) \longrightarrow M/c(M) + t(M) \longrightarrow 0$$

Y como $M/c(M) \in \mathcal{T}$ entonces $M/c(M) + t(M) \in \mathcal{T}$ también tenemos un epimorfismo

$$M/t(M) \longrightarrow M/c(M) + t(M) \longrightarrow 0$$

y como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes se tiene que $M/c(M) + t(M) \in \mathcal{C}$, es decir, $M/c(M) + t(M) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C} = 0$

$\Leftarrow$

Si $M \in \mathcal{L}$ entonces $t(M) = 0$ y como $M = c(M) + t(M) = C(M)$ entonces $M \in \mathcal{C}$, como se deseaba.

□

Proposición 1.4.12. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{L})$ una teoría TLT entonces son equivalentes:

(1) $M = c(M) + t(M)$ para todo módulo M.

(2) $R = c(R) + t(R)$.

(3) $\mathcal{C} = \mathcal{L}$.

(4) $t(c(M)) = 0$ y $c(M/t(M)) = M/t(M)$ para todo módulo M.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es obvio.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Como $R = c(R) + t(R)$ entonces el uno del anillo se escribe como $1 = e_1 + e_2$ con $e_1 \in c(R)$ y $e_2 \in t(R)$ entonces $e_1 = e_1 1 = e_1^2 + e_1 e_2$ y así $c(R) \ni e_1 - e_1^2 = e_1 e_2 \in t(R)$ por lo que $e_1^2 = e_1$ y $e_1 e_2 = 0$, es decir, son idempotentes ortogonales y además son centrales ya que si $a \in R$ entonces $a = a1 = ae_1 + ae_2$ y $1a = e_1 a + e_2 a$ entonces $e_1 a = e_1 a e_1 + e_1 a e_2$ entonces $t(R) \ni e_1 a e_2 = e_1 a - e_1 a e_1 \in c(R)$ por lo tanto $e_1 a = e_1 a e_1$ y también $ae_1 = e_1 a e_1$, es decir, $e_1 a = ae_1$ y analogo para $e_2 a = ae_2$, además tenemos que $c(R) = e_1 R$ y $t(R) = e_2 R$, pues si tomamos $a \in c(R)$ entonces $a = a1 = ae_1 + ae_2 \in c(R)$ por lo que $a = ae_1$ y claramente como $e_1 \in c(R)$ entonces $e_1 R \subseteq c(R)$ por lo que la igualdad $c(R) = e_1 R$ se tiene y es analogo por lo tanto la descomposición de la hipotésis es un producto directo de anillos, y así este descompone ala categoría pues si consideramos cualquier módulo M entonces dado $m \in M$ se tiene que $1m = (e_1 + e_2)m = e_1 m + e_2 m$ entonces $m \in e_1 M + e_2 M$ la otra contención es clara y de hecho esta suma es directa ya que si $m \in e_1 M \cap e_2 M$ es no cero entonces $m = e_1 n$ y $m = e_2 k$, es decir, $e_1 n = e_2 k$ y entonces $m = e_1 n = e_1^2 n = e_1 e_2 k = 0$. Finalmente como t es exacto izquierdo y ya que $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ es hereditaria entonces t es aditivo (ejercicio) y así para todo M módulo se tiene que $t(M) = e_1 t(M) \oplus e_2 t(M)$. En otras palabras $R - Mod \cong c(R) - Mod \times t(R) - Mod$.

Afirmamos que $t(M) = e_2 M$.

En efecto como $\mathcal{T} = \{M | cM = 0\}$ tenemos que $cM = c(R)M$ y por lo anterior $c(R) = e_1 R$, es decir,

$$\mathcal{T} = \{M | cM = 0\} = \{M | cRM = 0\} = \{M | e_1 M = 0\}$$

Entonces $e_2 M \in \mathcal{T}$ ya que $e_1(e_2 M) = 0$, y así obtenemos $e_2 M \subseteq tM$. Por otro lado como $tM \in \mathcal{T}$ se tiene que $e_1 tM = 0$ y entonces $tM = e_1 tM \oplus e_2 tM$

entonces $tM = e_2tM$ pero $tM \subseteq M$ y así $e_2tM \subseteq e_2M$ por lo tanto $tM = e_2tM \subseteq e_2M$, es decir, $tM \subseteq e_2M$.

De todo esto obtenemos $tM = e_2M$. Con esto en mente, veamos la igualdad requerida en (3). Primero notemos que $\mathcal{C} = \{M|cM = 0\} = \{M|cRM = M\} = \{M|e_1M = M\} = \{M|e_2M = 0\}$, la última igualdad es por que $M = e_1M \oplus e_2M$ entonces $e_1M = M \Leftrightarrow e_2M = 0$. Así

$$\mathcal{C} = \{M|e_2M = 0\} = \{M|e_2RM = 0\} = \{M|tRM = 0\} = \{M|tM = 0\} = \mathcal{L}$$

(3) $\Rightarrow$ (4)

$\mathcal{C} = \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{C}$ es cerrada bajo subobjetos y como $t(cM) \subseteq cM$ entonces $t(cM) \in \mathcal{C}$ pero $t(cM) \in \mathcal{T}$ por lo que $t(cM) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C} = 0$ y así $t(cM) = 0$. Por otro lado como $M/tM \in \mathcal{L} = \mathcal{C}$, entonces $c(M/tM) = M/tM$.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Como $c(M/tM) = M/tM$ entonces esto sucede si y solo si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ si y solo si $M = cM + tM$ (por 1.4.10 y 1.4.11) y esta suma es directa ya que como $\mathcal{T}$ es hereditaria entonces t es extacto izquierdo entonces $t(cM) = cM \cap tM$ pero $t(cM) = 0$ entonces $cM \cap tM = 0$.

$\square$

Definición 1.4.13. Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria y $\mathfrak{F}_\mathcal{T}$ su filtor asociado, denotemos por $I_\mathcal{T}$ y $J_\mathcal{T} \supseteq I_\mathcal{T}$ a los ideales izquierdos de R dados como :

(i) $I_\mathcal{T} = \bigcap_{L \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}} L$

(ii) $J_\mathcal{T}/I_\mathcal{T} = t(R/I_\mathcal{T})$

Proposición 1.4.14. Los ideales izquierdos $I_\mathcal{T}$ y $J_\mathcal{T}$ de la definición anterior 1.4.13 son bilaterales.

Demostración. (*i*)

$I_\mathcal{T} = \bigcap_{L \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}} L$, consideremos proyecciones canonicas $R \xrightarrow{\pi} R/L$ para cada $L \in \mathfrak{F}$ y $R \xrightarrow{f} R/L$ cualquier R-morfismo entonces por la proyectividad de R este morfismo se factoriza, es decir,
$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ R \arrow[r, "\pi"] & R/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
conmuta,

entonces para un $a \in R$ fijo se tiene que $h(1) = a$, así, $h(r) = rh(1) = ra$ por lo que $kerf = ker(\pi h) = (L : a)$.

Ahora se afirma que

$$I_\mathcal{T} = \bigcap_{L \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}} \left\{ ker(f)|\ R \xrightarrow{f} R/L \right\}$$

Para ver esto, consideremos $r \in L$ y $R \xrightarrow{f} R/L$ entonces existe $R \xrightarrow{h} R$ tal que $f(r) = \phi(r) = \pi(ar) = 0$ ya que $r \in L$ entonces $ar \in L$ y por lo tanto

$r \in ker(f)$ y esto para toda $R \xrightarrow{f} R/L$ y para todo $L \in \mathfrak{F}$ Reciprocamente, si $r \in ker(f)$ en particular $r \in ker(\pi) = L$ por lo que $r \in L$ para todo $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$, es decir, $r \in I_{\mathcal{T}}$, finalmente si $R \xrightarrow{f} R$ es cualquier R-morfismo veamos que $f(I_{\mathcal{T}}) \subseteq I_{\mathcal{T}}$.

En efecto, si $R \xrightarrow{h} R/L$ es cualquier R-morfismo con $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y consideramos la composición con f entonces para el morfismo $hf : R \to R/L$ observamos que si $x \in I_{\mathcal{T}} = \bigcap_{L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}} \left\{ ker(f) | \ R \xrightarrow{f} R/L \right\}$ entonces en particular $x \in ker(hf)$, $hf(x) = 0$ y asi $f(x) \in ker(h)$ para toda $h : R \to R/L$ y todo $L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces $f(x) \in I_{\mathcal{T}}$ por lo tanto se da la contención. Con esto en mente inmediatamente si consideramos un $r \in R$ y el morfismo multiplicar por r se tiene la bilateralidad de $I_{\mathcal{T}}$.

Veamos (ii)

El ideal izquierdo $J_{\mathcal{T}}$ tal que $J_{\mathcal{T}}/I_{\mathcal{T}} = t(R/I_{\mathcal{T}})$

$$J_{\mathcal{T}} = \{x \in R | \bar{x} = x + I_{\mathcal{T}} \in t(R/I_{\mathcal{T}})\}$$

Entonces sea $a \in J_{\mathcal{T}}$ y $b \in R$, así $\bar{a} \in t(R/I_{\mathcal{T}}) = \{\bar{r} \in R/I_{\mathcal{T}} | (0 : \bar{r}) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}\}$ y por consiguiente $(0 : \bar{a}) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ pues $(0 : \bar{a}) \subseteq (0 : \bar{ab})$ entonces $(0 : \bar{a}\bar{b}) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ por lo que $\bar{ab} \in t(R/I_{\mathcal{T}})$ por lo tanto $ab \in J_{\mathcal{T}}$.

□

Proposición 1.4.15. Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria, entonces son equivalentes:

(i) $\mathcal{T}$ es TLT.

(ii) Para todo $S \subseteq \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ se tiene que $\bigcap_{L \in S} L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$.

(iii) $I_{\mathcal{T}} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$

(iv) $J_{\mathcal{T}} = R$.

Demostración. (ii)⇒(iii) Es obvio con $S = \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$

(iii)⇒(ii)

Si $S \subseteq \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ y $H = \bigcap_{L \in S} L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$ entonces

$$I_{\mathcal{T}} = \bigcap_{L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}} L \subseteq \bigcap_{L \in S} L \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}} = H$$

por lo que

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T}} \ni I_{\mathcal{T}} \subseteq H$$

entonces $H \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$

(iv)⇒(iii)

Si $J_{\mathcal{T}} = R$ entonces $R/I_{\mathcal{T}} = t(R/I_{\mathcal{T}}) \in \mathcal{T}$ por lo tanto $I_{\mathcal{T}} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{T}}$

(ii)⇒(i) Por (ii) tenemos que si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{T}$ y además como

$$\mathcal{T} = \{M|(0:m) \in \mathfrak{F}_\mathcal{T} \forall m \in M\}$$

Si $(x_{\alpha\in\Lambda}) \in \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ su anulador es de la forma $\cap_{\alpha\in\Lambda}(0:x_\alpha)$ como cada intersectando esta en $\mathfrak{F}_\mathcal{T}$ entonces la intersección esta y así $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \mathcal{T}$.

(i)⇒(iii)

Como $\mathcal{T}$ es TLT entonces $\prod_{I\in\mathfrak{F}_\mathcal{T}} R/I \in \mathcal{T}$ y así el núcleo de las proyecciones canonicas

$$R \longrightarrow R/I$$

es justamente la intersección $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}_\mathcal{T}} I$ y está pertenece a $\mathfrak{F}_\mathcal{T}$ ya que los cocientes son submódulos de un objeto que esta en la clase $\mathcal{T}$.

□

La siguiente proposición (deprimera vista muy rara) sera de gran utilidad en proximos capitulos.

Proposición 1.4.16. Si todo ideal bilateral J propio de un anillo R satisface la siguiente condición:

Existe $k \notin J$ tal que para todo $r \in R$ con $rk \notin J$ existe $\sigma \in R$ tal que $\sigma rk = k$

Entonces toda clase de torsión hereditaria en R-Mod es cerrada bajo productos directos.

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión hereditaria en R-Mod y sea $J_\mathcal{T}$ el ideal bilateral definido en 1.4.13. Por 1.4.15 si demostramos que $J_\mathcal{T} = R$ entonces $\mathcal{T}$ sería TLT y así por 1.4.2 cerrada bajo productosa directos. Con este fin, supongamos que $J_\mathcal{T} \neq R$ y como $I_\mathcal{T} \subseteq J_\mathcal{T}$ entonces existe un $k \notin I_\mathcal{T}$, es decir, existe $L_0 \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}$ tal que $k \notin L_0$(*).

Observemos ahora que $(L_0 : k) \subseteq (J_\mathcal{T} : k)$ ya que para todo $r \notin (J_\mathcal{T} : k)$, es decir, para todo $r \in R$ tal que $rk \notin J_\mathcal{T}$ existe un $\sigma \in R$ tal que $\sigma rk = k$ (por hipotésis) por lo tanto si $r \in (L_0 : k)$, es decir, si $rk \in L_0$ entonces $\sigma rk \in L_0$ y así $k \in L_0$ lo cual contradice (*).

Ahora como $L_0 \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}$ entonces $(L_0 : k) \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}$ por lo que $(J_\mathcal{T} : k) \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}$. Pero $(J_\mathcal{T} : k) = (0 : k + J_\mathcal{T})$ y $(k + J_\mathcal{T} \neq 0)$ ya que $k \notin J_\mathcal{T}$ y por lo tanto $(0 : k + J_\mathcal{T}) \in \mathfrak{F}_\mathcal{T}$, es decir, $0 \neq k + J_\mathcal{T} \in t(R/J_\mathcal{T})$ una contradiccoón ya que $t(R/J_\mathcal{T}) = 0$ $(t(R/I_\mathcal{T}) = J_\mathcal{T}/I_\mathcal{T})$. Por lo tanto se debe de tener

$$J_\mathcal{T} = R$$

□

Proposición 1.4.17. Si R es un anillo perfecto derecho, entonces toda clase de torsión hereditaria es cerrada bajo productos directos.

Demostración. Sea J un ideal bilateral propio de R y sea

$$\mathscr{H} = \{H \nsubseteq J | H \text{ es principal izquierdo}\}$$

$\mathscr{H} \neq \emptyset$ ya que $J \neq R$ y así existe $r \in R - J$ tal que $Ra \nsubseteq J$. Ahora como R es perfecto derecho, satisaface la condición mínima sobre ideal principales izquierdos (Teorema de Bass), y así $\mathscr{H}$ tiene un mínimo, digamos K, entonces existe $k \in K - J$ y así para toda $r \in R$ con $rk \notin J$ consideremos el ideal principal izquierdo $R(rk)$, como $rk \notin J$ entonces $R(rk) \in \mathscr{H}$ y como $rk \in K$, entonces $R(rk) \subseteq K$ pero por la minimalidad de K se tiene que $R(rk) = K$ por lot anto para $k \in K = R(rk)$ se tiene que existe un $\sigma \in R$ tal que $\sigma rk = k$ por lo tanto el resultado se sigue de 1.4.15

$\square$

Capítulo 2

Teorías de Torsión en Anillos Neterianos izquierdos

Aquí presentamos un estudio más profundo de las Teorias de Torsión (Filtros de Gabriel) pero en el caso Neteriano izquierdo(derecho), sabemos por 1.3.13 que en el caso Neteriano conmutativo se tiene que las topologias de Gabriel estan dadas por un conjunto de ideales primos, es decir, para cada $\mathfrak{F} \in R - gab$ existe $\mathcal{P} \subseteq Spec(R)$ tal que $\mathfrak{F} = \{I | I \nsubseteq \wp \forall \wp \in \mathcal{P}\}$. El caso no conmutativo de este resultado requiere mas tecnología que desarrollaremos en este capitulo y daremos la caracterización de los filtros de gabriel en esta situación de naturaleza mas general.

2.1. Ideales Asociados Primos

Definición 2.1.1. Un ideal $\wp$ es primo si es bilateral, propio y para cualquesquiera dos ideales bilaterales I, J tales que $IJ \subseteq \wp$ entonces $I \subseteq \wp$ o $J \subseteq \wp$. Un anillo R es primo si el ideal 0 es primo.

Entonces de la defininción tenemos que $\wp$ es primo si y solo si $R/\wp$ es un anillo primo.

Si M es un R-módulo izquierdo diremos que un ideal bilateral I de R es un *asociado* para M si existe un submódulo de M, N tal que $I = an(K)$ para todo submódulo K de N. Ahora notemos que si I es un asociado de M entonces I debe de ser primo, ya que si $JL \subseteq I$ y $J \nsubseteq I$ entonces $JN \neq 0$ y así $L \subseteq an(JN) = an(N) = I$.

Denotamos por $Ass(M)$ al conjunto de ideales asociados de M. Si $\mathfrak{m}$ es un máximo de la familia de ideales de la forma $an(N)$ con N submódulo de M, entonces este tiene que ser una asociado a M ya que si $\mathfrak{m} = an(X)$ entonces si K es un submódulo de X se tiene que $an(X) \subseteq an(K)$ y así por maximalidad se sigue el argumento. Entonces en vista de este hecho de ahora en adelante para agrantizar la existencia de elementos máximos de tal familia pediremos que el anillo R sea neteriano izquierdo durante todo el resto del capitulo (salvo que se mencione lo contrario).

Con esto en mente es inmediato :

Proposición 2.1.2. Si M es un R-Módulo izquerdo no cero entonces

$$Ass(M) \neq \emptyset.$$

Lemma 2.1.3. Si

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Es una sucesión exacta corta entonces $Ass(L) \subseteq Ass(M) \subseteq Ass(L) \cup Ass(N)$

Demostración. Claramente $Ass(L) \subseteq Ass(M)$, sea $\mathfrak{p} = an(K) \in Ass(M)$ entonces $\mathfrak{p} = an(K')$ para todo K' submodulo de K no cero. Entonces si $K \cap L = 0$ se tiene que $K \cong N' \leqslant N$ por lo tanto $\mathfrak{p} \in Ass(N)$, por otro lado si $K \cap L \neq 0$ entonces $\mathfrak{p} \in Ass(K')$ para todo $K' \leqslant K \cap L \leqslant L$ por lo tanto $\mathfrak{p} \in Ass(L)$ □

Lemma 2.1.4. $Ass(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$

Demostración. Como $\mathfrak{p} \in Ass(M)$ si y sólo si $\mathfrak{p} \in Ass(L^{'})$ para todo $L^{'}$ submódulo ciclíco de L submódulo de M, entonces podemos suponer que Λ es finito y proceder por inducción, es decir supongamos que $M = M_1 \oplus M_2$ entonces tenemos una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

Entonces, $Ass(M_1) \subseteq Ass(M) \subseteq Ass(M_1) \cup Ass(M_2)$ analogo para $Ass(M_2)$ y así la igualdad se da □

Lemma 2.1.5. Si $N \leq_{ess} M$ entonces $Ass(M) = Ass(N)$.

Demostración. Una contención es obvia, entonces si $\mathfrak{p} \in Ass(M)$, es decir existe un submódulo L fr M tal que para todo ciclico de L, C , $\mathfrak{p}$ anula a C y como $C \cap N$ es no cero, $\mathfrak{p}$ también es su anulador y así se da la contención. □

Definición 2.1.6. Sea M un módulo, diremos que M es inescindible si no se puede escribir como la suma directa de dos submódulos propios. Un submódulo K de un módulo M es irreducible si no se puede escribir como la intersección de dos submódulos de M que lo contengan propiamente.

Claramente, N es irreducible en M si y sólo si M/N es coirreducible.

Proposición 2.1.7. Si M es un módulo no cero coirreducible entonces $Ass(M)$ consta de un solo objeto.

Demostración. Si K y L son submódulos no cero de M entonces su intersección es no cero y así $Ann(K) + Ann(L) \subseteq Ann(K \cap L)$ entonces existe un elemento máximo en $Ass(M)$ de la forma $Ann(L)$ con L no cero. □

Corolario 2.1.8. Si M es un módulo con $udim(M) < \infty$ entonces $Ass(M)$ es finito.

Demostración. Directo del anterior.

□

Definición 2.1.9. Un módulo M es coterciario si $Ass(M)$ consta de un solo objeto, en este caso denotaremos al conjunto de asociados por $ass(M)$. Un submódulo L de M es terciario en M si M/L es coterciario. Si $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, diremos que un submódulo L de M es $\mathfrak{p} - terciario$ en M si $Ass(M/L) = \{\mathfrak{p}\}$

Lemma 2.1.10. Todo idela primo $\mathfrak{p}$ es un submódulo $\mathfrak{p} - terciario$ del anillo.

Demostración. Sea I un ideal izquierdo de R tal que $\mathfrak{p} \leq I$. si $J = Ann(I/\mathfrak{p})$ entonces $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ es decir $J \subseteq \mathfrak{p}$ por lo tanto $Ass(R/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ □

Lemma 2.1.11. Intersección de submódulos $\mathfrak{p}-$terciarios es $\mathfrak{p}-$terciario.

Demostración. Si $\{L_i\}_{i\in\Lambda}$ es una familia de submódulos $\mathfrak{p}-$terciarios de un módulo M entonces el monomorfismo $M/\bigcap_{i\in\Lambda} L_i \to M/\bigoplus_{i\in\Lambda} L_i$ muestra que $Ass(M/\bigcap_{i\in\Lambda} L_i) \subseteq \bigcup_{i\in\Lambda} Ass(M/L_i) = \{\mathfrak{p}\}$ □

Antes de proseguir observemos que tenemos en el caso conmmutativo neteriano, tomemos un ideal primo $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ entonces note que $\mathfrak{p}$ es irreducible y así el anillo cociente $R/\mathfrak{p}$ es un módulo uniforme por lo que $E(R/\mathfrak{p})$ es inescindible, en general no siempre es así, lo que si sucede es que siempre es un módulo coterciario, en el caso general tenemos.

Proposición 2.1.12. Si $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ y $E(R/\mathfrak{p}) = \bigoplus_{i\in\Lambda} E_i$ donde E_i son inyectivos inescindibles para toda $i \in \Lambda$, entonces

$$E_i \cong E_j$$

Demostración. La prueba utiliza dos resultados, uno tiene que ver con anillos de cocientes y el otro es el teorema de Azumaya así que despues de la rpueba mencionaremos esos resultados y daremos un esbozo de su prueba.

Para comenzar recordemos que $R/\mathfrak{p}$ es neteriano primo, entonces tiene anillo calsico de cocientes Q y como $R/\mathfrak{p}$ es esencial en Q como módulo derecho sobre $R/\mathfrak{p}$ y así por restricción de escalres también lo es como R-módulo

□