Algunas nociones generales del concepto de Localización

Angel Zaldívar Corichi

Verano 2010

Introducción

Como mucho de los conceptos en el Álgebra, la localización surge de problemas geométricos, es decir, estudiar las propiedades locales de una variedad resulta útil y fructifero, más aun este metodo se ha convertido en una filosofia en la matemática, estudiar objetos localmente, alrededor de un punto, un elemento. Basicamente la localización abstraer estas situaciones a enfoques mas generales para atacar problemas desde otros puntos de vista donde estos tengan soluciones mas practicas, o tengan solución.

Posiblemente los primeros indicios de estas tecnicas se encuentran en los seminarios Bourbaki y en Exposé II en Artin-Grothendieck-Verdier, donde utilizan el proceso de lolacización para asociar a una pregavilla definida en una topología de grothendieck una gavilla.

Espero que estas notas sean una buena introducción poco formal a este tipo de situaciones que aparecen en muchos ambitos de la matemática moderna.

Capítulo 1

Motivación

Recordemos la construcción de $\mathbb{Q}$ apartir del anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Consideremos el subconjunto de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} - \{0\}$ y pensemos en el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ en el definamos la siguiente relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } ad = bc$$

Es facil ver que esta relación resulta ser de equivalencia, así formamos el conjunto de clases de equivalencia $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) / \sim$ con las operaciones obvias este resulta ser un anillo conmutativo con uno más aún resulta ser un campo al cual denotaremos por $\mathbb{Q}$ (el lector claramente deberá checar que con las operaciones obvias este resulta ser un campo).

Ahora bien notemos que hay una función natural de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $\varphi(a) = [a, 1]$ (donde a las clases en $\mathbb{Q}$ las podemos pensar como fracciones), es claro que esta función esta bien definida y además resulta ser un morfismo de anillos, más aún esta resulta inyectiva, lo cual es lo más deseable pues siempre pensamos a $\mathbb{Z}$, como un subconjunto de $\mathbb{Q}$. De hecho esta situación es buena en el siguiente sentido. Supongamos que se tiene otro campo Q y un monomorfismo de anillos $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow Q$ entonces podemos definir un morfismo de $\mathbb{Q}$ en Q dado por $\hat{\psi}([a, b]) = \psi(a)\psi^{-1}(b)$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{Q} \arrow[dl, dashed, "\hat{\psi}"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

De hecho el morfismo $\hat{\psi}$ es único con tal propiedad, así tenemos una construcción universal, es decir, el campo de los numeros racionales es único salvo isomorfimos más aún este caso es el campo mas pequeño en el cual se inyecta $\mathbb{Z}$.

Ahora bien, esta construcción es particular ya que la podemos calcar para cualquier dominio entero. Resumiendo:

Teorema 1.0.1. Sea D un dominio entero entonces existe un campo $K(D)$ y un monomorfismo de anillos (llamado el morfismo de localización) $D \xrightarrow{\varphi} K(D)$ tal que para cualesquiera otro campo Q y un monomorfismo $D \xrightarrow{\psi} Q$ existe un único morfismo $K(D) \xrightarrow{\hat{\psi}} Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & K(D) \arrow[dl, dashed, "\hat{\psi}"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Al campo $K(D)$ se le llama el campo de cocientes del dominio entero D. Note que en terminos coloquiales lo que estamos haciendo en el ejemplo anterior es invertir los elementos no cero del dominio entero en cuestión, es decir, construimos una estructura donde estos tienen inverso bilateral. Esta es la idea central de la localización, *invertir* ciertos elementos.

Siguiendo con la motivación, en el ejemplo anterior notemos que el subconjunto en el cual estamos invirtiendo es $D-\{0\}$ y este cumple las siguientes propiedades:

i) El unitario de D, denotado por 1, pertenece a $D-\{0\}$.

ii) Dados $d, d' \in D-\{0\}$, se tiene que $dd' \in D-\{0\}$.

Entonces que tanto podemos con estas ideas generalizar, digamos al caso de un anillo conmutativo con uno R.

Primero necesitamos un subconjunto $S \subseteq R$ tal que :

i) $1 \in S$.

ii) Para cualesquiera $s, s' \in S$ se tiene que $ss' \in S$.

A tales subconjuntos les llamaremos *multiplicativos.*

Ahora bien como en los ejemplos anteriores consideramos el producto cartesiano $R \times S$ y en el definimos la siguienta relación:

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \text{ existe } u \in S \text{ tal que } u(at - bs) = 0$$

De nuevo esta relación resulta ser de equivalencia, y notemos que en el caso cuando R es un dominio entero y el subconjunto multiplicativo en cuestión son todos los elementos distintos de cero la relación de equivalencia es la misma solo que aqui pedimos que exista un elemento en S que anule a diferencia es decir invertimos con respecto a S los elementos de R.

Entonces tomamos el conjunto de clases de equivalencia módulo esta relación $R \times S/\sim$, en el introducimos las operaciones naturales de fracciones y así resulta que $R \times S/\sim$ es un anillo conmutativo (pues R lo es) con uno al cual denotaremos por $S^{-1}R$ y lo llamaremos el anillo de fracciones de R con respecto al subconjunto multiplicativo S. También se tiene un morfismo de localización $\varphi_S : R \to S^{-1}R$, que se calcula como $\varphi_S(a) = [a, 1]$ pero a diferencia del caso anterior este no resulta ser inyectivo en general ya que se puede ver que el núcleo de φ_S, es $Ker(\varphi_S) = \{a \in R : sa = 0 \text{ para algún } s \in S\}$.

Y está situación un tanto mas general es buena también ya que, para cualquier otro morfismo de anillos $\psi : R \to Q$ tal que $\psi(S) \subseteq Q^*$ (es decir la imagen bajo ese morfismo de S son unidades en el anillo Q), entonces existe un único morfismo de anillos $\hat{\psi} : S^{-1}R \longrightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\hat{\psi}"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

A la propiedad anterior se le conoce como *la propiedad universal del anillo de fracciones* $S^{-1}R$.

Aqui surge una pregunta natural, en el caso no conmutativo se tendrá una construcción similar, es decir, ¿si R es un anillo asociativo con uno (no necesariamente conmutativo) y S es un subconjuto multiplicativo de R, entonces podemos construir $S^{-1}R$?. Lo que necesitamos es abstraer las propiedades de un anillo de fracciones de tal forma que la conmutatividad del anillo no intervenga, a primera vista podemos ver que tenemos lo siguiente:

A partir de un anillo R (conmutativo) y un subconjunto multiplicativo S construimos un anillo $S^{-1}R$ y un morfismo de anillos $\varphi : R \to S^{-1}R$ tal que se cumple lo siguiente:

i) $\varphi(s)$ es invertible para todo $s \in S$.

ii) Todo elemento en $S^{-1}R$ es de la forma $\varphi(a)\varphi(s)^{-1}$.

iii) $\varphi(a) = 0$ si y sólo si $sa = 0$ para algún $s \in S$.

Y además cumple la siguiente propiedad para cualquier morfismo de anillos $\psi : R \to B$ tal que $\psi(s)$ es invertible en B para todo $s \in S$, existe un único morfimo de anillos $\hat{\psi} : S^{-1}R \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\hat{\psi}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Con esto, estamos viendo que si el tal anillo de fracciones existe (con respecto a un subconjunto multiplicativo) se cumplen las propiedades anteriormente mencionadas. Y así para el caso en general, es decir, para cualquier anillo con uno R y un subconjunto multiplicativo S podemos definir que es un anillo de fracciones con respecto a S. Entonces tenemos la siguiente definición.

Definición 1.0.2. Sea R un anillo con uno y S un subconjunto multiplicativo de R, un anillo de fraciones izquierdo con respecto a S, es un par $(S^{-1}R, \varphi)$ donde $S^{-1}R$ es un anillo y un morfismo de anillos $\varphi : R \to S^{-1}R$ que satisface:

i) $\varphi(s)$ es invertible para todo $s \in S$.

ii) Todo elemento en $S^{-1}R$ es de la forma $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$.

iii) $\varphi(a) = 0$ si y sólo si $sa = 0$ para algún $s \in S$.

Y de está definición se ve que si existe un anillo de fracciones para R con respecto a S este cumple la situación:

Teorema 1.0.3. Sea R un anillo y S un subconjunto multiplicativo de R, supongamos que existe el anillo de fracciones con respecto a S, $S^{-1}R$, entonces para cualquier morfismo de anillos $\psi : R \to B$ tal que $\psi(s)$ es invertible en B para todo $s \in S$, existe un único morfimo de anillos $\hat{\psi} : S^{-1}R \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\hat{\psi}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Entonces con esta definición y su consecuencia hemos podido generalizar la idea de la construcción de los racionales partir de los enteros. Pero observe que hay un detalle interesante en el teorema anterior estamos suponiendo la existencia del anillo de fracciones con respecto a un subconjunto multiplicativo, esto es por que en el caso general si tenemos un subconjunto multiplicativo puede que con este no seamos capaces de construir al anillo de fracciones. Entonces necesitamos pedir al subconjunto multiplicativo lo siguiente:

$S1$) Si $s \in S$ y $r \in R$, entonces existe $t \in S$ y $b \in R$ tal que $rt = bs$.

$S2$) Si $as = 0$ con $s \in S$, entonces $ta = 0$ para algún $t \in S$.

Más aún resulta que $S^{-1}R = S \times R/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida como $(s, a) \sim (t, b)$ si y sólo si exiten $c, d \in R$ tales que $cs = dt \in S$ y $ca = db$.

Si tenemos que S satisface $S1$ y $S2$ diremos que S es un conjunto de *denominadores izquierdo* y si satisface $S1$ diremos que S es *permutable izquierdo* y si se satisface $S2$ diremos que es *reversible izquierdo*. A las condiciones $S1$ y $S2$ se les llama *condiciones de Ore izquierdas* (evidentemente podemos definir las condiciones de Ore derechas y construir RS^{-1}) . Todo lo anterior se resume en el siguiente:

Teorema 1.0.4. Sea S un subconjunto multiplicativo de R. $S^{-1}R$ existe si y sólo si S satisface las condiciones de Ore izquierdas(derechas)

Un corolario interesante de lo anterior y junto con la propiedad universal es:

Corolario 1.0.5. Si $S^{-1}R$ y RS^{-1} existen, entonces son isomorfos.

Entonces con esto hemos generalizado la construcción de $\mathbb{Q}$ apartir de $\mathbb{Z}$, a anillos no necesariamente conmutativos. Pero regresemos al caso de los enteros.

Cuando localizamos $\mathbb{Z}$ con respecto a $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ tenemos el morfismo de localización $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ entonces por restricción de escalares todo $\mathbb{Q} - modulo$ es un $\mathbb{Z} - modulo$ esto que sugiere, al construir $\mathbb{Q}$ estamos de alguna forma considerando la categoría $\mathbb{Q} - Mod$ y vemos que cada objeto ahi se puede pensar como un objeto en la categoría $\mathbb{Z} - Mod$ de hecho notemos lo siguiente dado cualquier objeto de $\mathbb{Z} - Mod$, podemos construir el *módulo de fracciones con respecto a* S imitando la construcción que se hace en el anillo de los enteros con respecto a S y tambien se tiene un morfismo de localización $\varphi_M : M \longrightarrow S^{-1}M$ dado por la misma regla que en el anillo, además note que si tenemos un morfismo $\psi : M \to N$ y consideramos sus módulos de fracciones con respecto a S este induce un morfismo entre ellos, $\breve{\psi} : S^{-1}M \to S^{-1}N$ dado por $\breve{\psi}(m/s) = \psi(m)/s$, claramente este es morfismo en $S^{-1}\mathbb{Z} - Mod$ y además es un ejercicio sencillo ver que esto se comparta bien con composiciones y manda isomorfismos en isomorfismos, en otras palabras tenemos un funtor covariante $S^{-1}(\_)$ de la categoría de grupos abelianos en la categoría de $\mathbb{Q} - Mod$ (o simplemente espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$).

Tambien observe que no hemos ocupado las propiedades de los enteros ni del subconjunto multiplicativo en cuestión, es decir, esta construcción sucede en cualesquiera anillo con uno R y subconjunto multiplicativo S (que cumpla las condiciones de Ore). Simplemente localizamos con respecto a S, y formamos la categoría $S^{-1}R - Mod$ y tenemos el funtor de localización $S^{-1}() : R - Mod \to S^{-1}R - Mod$ y tambien es fácil ver que este es un funtor exacto. De hecho en el caso conmutativo se observa, que $S^{-1}(M) \cong S^{-1}R \otimes M$.

Esto último sugiere otro enfoque de la localización en anillos, es decir, que alguna forma podemos hablar de una *categoría de fracciones*, que en nuestro caso sería $S^{-1}R - Mod$, claramente si es se puede hablar de lo anterior en categorias en general tendriamos que examinar más a fondo que queremos decir con una categoría de fracciones y está construcción en el caso de anillos da pie a las consideraciones que se harán a continuación para hacer ver que la localización es de universal (mejor dicho resuleve un problema universal).

Capítulo 2

Localización en Categorías

En este capitulo se pretende introducir (sin meternos en detalles) algunas nociones generales del concepto de localización y así considerar teorías de localización en disintas categorias (espero que el lector no se ofusque en esta parte si no al contrario que genere una curiosidad para que investigue y verifique lo que se debe de verificar) haciendo ver que la idea es la misma que en los casos anteriores, *invertir*.

Empezemos retomando el ejemplo de la construcción del anillo de cocientes con respecto a un subconjunto multiplicativo. Entonces tomamos un anillo R y un subconjunto multiplicativo de R, S y formamos el anillo $S^{-1}R$, ahora formemos el siguiente conjunto $\mathcal{F} = \{I \cap S \neq \emptyset | I \leq R\}$, es decir el conjunto de todos los ideales (izquierdos) que intersectan a S. Ahora pensemos en la siguiente clase de módulos asociada a tal conjunto $\mathcal{T} = \{M | Ann(x) \in \mathcal{F} \text{ para todo } x \in M\}$(donde $Ann(x) = \{r \in R | rx = 0\}$) uno puede observar que el conjunto anterior cumple lo siguiente:

i) Dado $N \leq M$ y $M \in \mathcal{T}$ entonces $N \in \mathcal{T}$.

ii) Si $0 \to N \to M \to K \to 0$ es exacta corta y $N, K \in \mathcal{T}$ entonces $M \in \mathcal{T}$.

iii) Si $M \in \mathcal{T}$ entonces todo cociente de M esta en $\mathcal{T}$.

iv) Y toda suma directa de elementos en $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Por ejemplo, si pensamos en el caso de los enteros la clase $\mathcal{T}$ asociada a $\mathcal{F}$ con respecto al subconjunto multiplicativo $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ es justamente la clase de todos los grupos abelianos de torsión. De hecho a las clases de objetos que cumplen lo anterior se les llama *clases de torsión hereditarias*.

Aqui viene el punto crucial de estas consideraciones, a la clase $\mathcal{T}$ le asociamos otra clase, pero de morfismos en la categoría $R-Mod$, dada como:

$$\mathfrak{S} = \{s \in \text{Morf tales que } ker(s) \text{ y } coker(s) \in \mathcal{T}\}$$

(donde aqui $coker(s)$ denota al codominio de s cociente $Im(s)$)

Además observe que dados $s, s^{'} \in \mathfrak{S}$ se tiene que $s \circ s^{'} \in \mathfrak{S}$ y se puede hacer notar que esta clase de morfismos tambien cumple lo siguiente:

Para cualquier diagrama de la forma: con $s \in \mathfrak{S}$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d] \\ M \arrow[r, "s"] & K \end{tikzcd}$$

esté se puede completar (encajar) en el siguiente cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\hat{s}"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ M \arrow[r, "s"] & K \end{tikzcd}$$

con $\hat{s} \in \mathfrak{S}$

Y es aquí donde podemos ver que si consideramos el caso $R = \mathbb{Z}$, entonces pensamos a la clase de estos morfismos en la categoría de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales, estos morfismos resultan ser ¡isomorfismos!, eh aquí la idea central de la localización, en esa categoria estos morfismos son invertibles.

A continuación daremos una descripción (superficial) de la teoría general de localización.

Consideremos una categoría $\mathscr{C}$ y denotemos por Σ a una subclase de la clase de morfismos de la categoría $\mathscr{C}$. Diremos que una pareja $(T, \mathscr{C}_{\Sigma})$ donde $\mathscr{C}_{\Sigma}$ es una categoría y $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}_{\Sigma}$ es un funtor covariante es una *categoría de fracciones* de $\mathscr{C}$ con respecto a Σ si para cualquier $s \in \Sigma$, $T(s)$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}_{\Sigma}$ y si existe otro funtor covariante $T^{'} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^{'}$ tal que para todo $s \in \Sigma$, $T^{'}(s)$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}^{'}$ entonces existe un único funtor $\bar{T} : \mathscr{C}_{\Sigma} \longrightarrow \mathscr{C}^{'}$ tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T'"'] & \mathscr{C}_\Sigma \arrow[dl, dashed, "\bar{T}"] \\ \mathscr{C}' & \end{tikzcd}$$

Noten la analogía con la situación del capitulo anteior, respecto a la propiedad universal del anillo de fracciones, es decir, tenemos la misma conmutatividad, es el mismo diagrama (por decirlo de alguna manera).

Ahora surge la pregunta, ¿dada una categoría bajo que condiciones de la clase de morfismos existe la categoría de fracciones (categoría cociente)?. Como en el caso de determinar cuando existe el anillo de cocientes con respecto a un subconjunto multiplicativo, y esté existia simpre y cuando el subconjunto multiplicativo cumpla las condiciones de Ore. Acontinuación respondemos la pregunta.

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y denotemos por Σ a una subclase de la clase de morfismos de la categoría, diremos que Σ es *multiplicativo* si dados $s, s^{'} \in \Sigma$ se tiene que $s \circ s^{'} \in \Sigma$ y todos los morfismos identidad están en Σ. Además si Σ cumple que para cualquier ángulo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$ este se puede encajar en el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\hat{s}"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

con $\hat{s} \in \Sigma$.

Si Σ es multiplicativo y cumple lo anterior diremos que Σ es *permutable por la derecha* . Supongamos que tenemos morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$ tal que para algún $s \in \Sigma$, $s : Y \longrightarrow Y^{'}$ se tiene que $sf = sg$, entonces si existe $s^{'} : Z \longrightarrow X$ con $s^{'} \in \Sigma$ tal que $fs^{'} = gs^{'}$, diremos que Σ es *simplificable por la derecha* . Si Σ es permutable por la derecha y simplificable por la derecha, entonces diremos que Σ es *calculable por la derecha* . Uno puede dualizar lo anterior es decir, pedir todo por la izquierda y así Σ se dice ser calculable por la izquierda. Y diremos que Σ es *bicalculable* si es calculable izquierdo y derecho.

Note la analogía con las condiciones de Ore, de alguna manera son las mismas situaciones solo que en distintas perspectivas.

Entonces podemos pensar que tendremos un teorema análogo al teorema 1.0.4, en teoría si lo tenemos solo que hay que pedir condiciones extras a la categoría a saber que la categoría sea preaditiva y que cierta subcategoría contenga a una categoría pequeña (que la clase de objetos de ella sea un conjunto). Estos detalles no los daremos en las notas, pero el lector interesado puede checar la bibliografia en donde se dan con lujo de detalle las situaciones anteriores.

El ejemplo con el que se empezo este capítulo contiene situaciones interesantes, a saber la clase que se definió $\mathcal{T}$ apartir del conjunto $\mathcal{F}$ se puede definir en general y a tales clases se les llama *subcategorias de Serre* (o también teorías de torsión hereditarias) y son estas donde se pueden hacer localizaciones abstractas y además a cerca de está teoría existen muchos otros puntos que deben ser estudiados, ya que el conjunto $\mathcal{F}$ cumple otras propiedades que topologizan la idea de localización con respecto a una subcategoría de Serre.

Por último mencionaremos como se define una localización de manera general, no abundaremos en detalles por el espacio de estas notas (estas notas solo pretenden dar pie a que el lector interesado investigue y estudie lo anterior), posiblemente habrá lenguaje que no se entienda en su totalidad pero con el tiempo el lector entenderá de lo que se trata la localización.

Dada una categoría $\mathscr{C}$ diremos que una localización de $\mathscr{C}$ es un par $(\mathscr{C}', T)$ donde $\mathscr{C}'$ es una categoría y

$$T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$$

es un funtor que conmuta con limítes directos finitos (cuando estos existen) y tiene adjunto derecho plano y fiel.

Capítulo 3

Algunas aplicaciones

En este capítulo se mencionaran algunas aplicaciones de la teoría general de localización a distintos ambitos.

3.1. Aplicaciones en Álgebra

Claramente por como se dio la motivación de la idea de localización, en el álgebra está debe jugar un papel importante, aquí daremos algunos teoremas (sin demostración) solo con el afán de resaltar la importancia de la localización.

Sea R un anillo asociativo con uno, consideremos el siguiente subconjunto multiplicativo denotado por S_{reg} que consiste en el conjunto de todos los elementos *regulares* de R, es decir, todos los elementos que no son divisores de cero. Entonces uno observa que S_{reg} cumple las condiciones de Ore y así formamos el anillo de fracciones con respecto a S, denotado por, $Q^l_{cl}(R)$ a este anillo se le suele llamar el *anillo clásico de cocientes izquierdo*.

Diremos que un anillo R es un *anillo de cocientes* si todo elemento regular, es invertible en R, es decir, R es su propio anillo clásico de cocientes. Dado un anillo clásico de cocientes Q uno se puede preguntar de que anillos R, Q es su anillo clasico de cocientes, es por esto que uno define:

Definición 3.1.1. Si R es un subanillo de un anillo de cocientes Q tal que Q es el anillo de cocientes de R, diremos que R es un *orden izquierdo en Q*

Mencionaremos dos teoremas (inmortales) en la teoría general de anillos, pero antes unas definiciones.

Un anillo R es *semisimple* si los únicos ideales bilaterales son el total y el cero. Diremos que un anillo satiscafe *la condición ascendente de cadenas* si toda cadena ascendente de ideales izquierdos $I_1 \subset I_2 \subset ...$ es finita, es decir, existe un k natural tal que $I_k = I_{k+1}$. Y por último un ideal izquierdo I de R es *esencial* si $I \cap J \neq 0$ para todo ideal izquierdo J no cero.

Uno de los resultados mas importantes en el estudio de anillos no conmutativos es el teorema de Artin-Wedderburn que establece la estructura de anillos semisimples.

Teorema 3.1.2. *(Artin-Wedderburn)* Sea R un anillo semisimple entonces R es isomorfo a un producto finito de anillos de matrices con coeficientes en anillos con división.

Goldie generaliza tal teorema (de hecho es la máxima generalización del teorema de Artin-Wedderburn) y en la prueba de esté teorema se utiliza fuertemente la idea de anillo de cocientes clásico (que resulta ser semisimple). El teorema es:

Teorema 3.1.3. *(Goldie)*
Las siguientes condiciones para un anillo R son equivalentes:

i) R es un orden izquierdo en un anillo semisimple.

ii) R satisface la condición ascendente de cadenas de anuladores izquierdos y es un anillo semisimple.

iii) Todo ideal izquierdo en R es escencial si y sólo si esté contiene un elemento regular.

El teorema anterior da pie a la siguiente cuestión, determinar condiciones suficientes y necesarias para que un anillo R tenga un anillo clásico de cocientes de cierto tipo (que tenga cierta propiedad, alguna condición de finutud por ejemplo). Algunos de tales teoremas son el teorema de Small que da las condiciones necesarias en anillos neterianos (izquierdos). Tambien la teoría de anillos clásicos de cocientes es utilizada en el estudios de anillos de grupo (algebras de grupo).

Un dato curioso, a Goldie (matemático inglés) le apodaron the lord of the rings (por obvias razones).

Estas consideraciones sobre el anillo clásico de cocientes se pueden ver desde el punto de vista de categorías de fracciones, de hecho la idea empezaría como en el capítulo anterior considerando el conjunto $\mathcal{F}$ pero con el subconjnuto multiplicativo S_{reg}.

Muchas otras aplicaciones se pueden dar con respecto a localización en la teoría general de anillos y el estudio de categorías de módulos, pero estás se escapan del objetivo de las notas, pero de nuevo invito al lector a revisar la bibliogafía sugerente sobre esté tema.

3.2. Aplicaciones en Topología

Aquí abordaremos una teoría general de localización para ciertos espacios topologícos, en esta parte se usaran ciertos conceptos básicos de topología algebraica (así que esta sección es un tanto mas pesada).

Primero describiremos una teoría general de localización, llamada localizaicón de Bousfield, quien la estudio y se ha visto que está generaliza situaciones intenresantes sobre el cálculo de ciertos grupos de homotopia de esferas en cierta dimensión. La idea de esta localización es invertir cierta clase de funciones continuas de hecho hacerlas invertibles (aquí queremos que sean invertibles en el sentido homotopíco, es decir, que en la categoría homotopíca estas sean isomorfismos) relativas con respecto a un espacio.

Definición 3.2.1. Si M es un espacio topológico conexo basado, entonces un espacio topológico basado X se dice ser *M-nulo o local con respecto* a $M \longrightarrow *$ si alguna de las siguientes situaciones (que son equivalentes) sucede:

i) Si la función (que manda toda función en el punto base) $Hom(M, X) \longrightarrow X$ es una equivalencia débil.

ii) El espacio de las funciones basadas $Hom(M, X)_*$ es debílmente contraíble.

Definición 3.2.2. Dada una función basada $f : A \to B$, se dice que es una *equivalencia local* con respecto a $M \longrightarrow *$, si alguna de las siguientes condiciones (que son equivalentes) se cumple.

i) La función $f^* : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ es una equivalencia debíl.

ii) La función basada $f^* : Hom(B, X)_* \to Hom(A, X)_*$ es una equivalencia debíl.

La siguiente definición es una analogía de las situaciones algebraicas.

Definición 3.2.3. Si A es un espacio basado, una *localización* de A con respecto a $M \longrightarrow *$ es un par $(\iota, \bar{A})$, donde:

i) $\iota : A \to \bar{A}$ es una equivalencia local con respecto $M \longrightarrow *$.

ii) $\bar{A}$ es local con respecto a $M \longrightarrow *$.

Denotaremos por $L(A)_M$ un localización de A con respecto a $M \longrightarrow *$, y como en las situaciones anteriores está satisface la siguiente propiedad universal:

Para cualquiera espacio basado X local con respecto a $M \longrightarrow *$ y funciones basadas $g : A \to X$ existe salvo homotopía una única función basada $h : L(A)_M \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta en homotopía

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & & L(A)_M \arrow[dll, dashed, "h"] \\ X & & \end{tikzcd}$$

Se prueba que para todo espacio basado A existe una localización $A \xrightarrow{\iota} L(A)_M$ con respecto $M \longrightarrow *$.

Reemplanteamos esta situación general con las siguientes consideraciones.

Una de las localizaciones mas conocida es en el anillo de números enteros, localizando a esté en el complemento de un conjunto de primos. Aqui describimos está situación, en terminos de lo que hemos desarrollado en los capítulos anteriores, sea $\mathfrak{P}$ el conjunto de números primos de $\mathbb{Z}$ y consideremos el monoide generado por el conjunto $\mathfrak{P}$, al cual denotamos por T, pongamos $S = \mathbb{Z} - T$, esté es un subconjunto multiplicativo de $\mathbb{Z}$ entonces localizemos con respecto a el, es decir, consideramos el anillo $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(S)}$. Entonces diremos que un grupo abeliano G es S-local si y sólo si esté es un $\mathbb{Z}_{(S)}$-módulo. Con está idea podemos formular la siguiente definición.

Definición 3.2.4. Un espacio basado simplemente conexo X es *S-local* si sus grupos de homotopía $\pi_k(X)$ son S-locales para toda $k \geq 1$.

Y está es una estancia particular de la teoría de localización de Bousfield.

Algunos resultados interesantes que se pueden probar son los siguientes, el primero de ellos tal vez el primero cronologicamente hablando es debido a Serre.

Teorema 3.2.5. *(Serre)* Si $n \geq 1$ y p es un primo impar, entonces el grupo $\pi_{2n+2p-2}(\mathbb{S}^{2n+1})$ contiene un sumando isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

De hecho con la teoría descrita arriba uno puede probar lo siguiente (con un poco mas de herramienta de está misma teoría)

Teorema 3.2.6. *(Conjetura de Serre)* Si X es un complejo simplemente conexo finito con homología reducida módulo p no trivial, entonces el subgrupo de p-torsión de $\pi_n(X)$ es no cero para toda n.

Y estos son solo algunos de los resultados que se pueden probar con está teoría de localización.

Hay más ejemplos de teorías generales de localización en topología algebraica, por mencionar, la construcción de la categoría de Espectros (de CW-complejos), en la cual los morfismos inducidos por el funtor de suspensión son invertibles, resaltando una vez más que la idea de localización es invertir objetos (flechas).